IDEAL-IDEAL PADA ALJABAR BCI *P-SEMISIMPLE* YANG TERBANGUN DARI KARAKTERISASI GRUP MODULO *n*

SKRIPSI

Oleh:
LUSI SARWO ENDAH
NIM. 07610026

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

IDEAL-IDEAL PADA ALJABAR BCI *P-SEMISIMPLE* YANG TERBANGUN DARI KARAKTERISASI GRUP MODULO *n*

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si.)

Oleh :
LUSI SARWO ENDAH
NIM. 07610026

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

IDEAL-IDEAL PADA ALJABAR BCI *P-SEMISIMPLE* YANG TERBANGUN DARI KARAKTERISASI GRUP MODULO *n*

SKRIPSI

Oleh:
LUSI SARWO ENDAH
NIM : 07610026

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 15 Juli 2011

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Drs. H .Turmudi , M.Si	**Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag**
NIP. 19571005 198203 1 006	**NIP. 19720420 200212 1 003**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

IDEAL-IDEAL PADA ALJABAR BCI *P-SEMISIMPLE* YANG TERBANGUN DARI KARAKTERISASI GRUP MODULO *n*

SKRIPSI

Oleh:
LUSI SARWO ENDAH
NIM. 07610026

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 21 juli 2011

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	: **Hairur Rahman, M.Si** **NIP. 19800429 200604 1 003**	( )
2. Ketua	: **Usman Pagalay, M.Si** **NIP. 19650414 200312 1 001**	( )
3. Sekretaris	: **Drs. H. Turmudi, M.Si** **NIP. 19571005 198203 1 006**	( )
4. Anggota	: **Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag** **NIP. 19720420 200212 1 003**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERSEMBAHAN

Dengan Iringan Doa dan Rasa Sukur yang teramat besar, Karya tulis ini penulis persembahkan kepada:

Ayah, Ibu dan adek tercinta, yang telah memberikan motifasi, doa, semangat, dan segala yang penulis butuhkan.
Teman-teman yang selalu memberikan dukungan moral dan spiritual.

MOTTO

كُنِيْ مُتَفَائِلَةً وَلَاتَكُنِيْ مُتَشَائِمَةً

“*Jadilah (kamu perempuan)orang yang Optimis, dan jangan jadi orang yang pesimis*”

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Lusi Sarwo Endah

NIM : 07610026

Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika

Judul Penelitian : Ideal-ideal pada Aljabar BCI *P-semisimple* yang Terbangun dari Karakterisasi Grup Modulo *n*

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 21 juli 2011

Yang membuat pernyataan,

Lusi Sarwo Endah

NIM. 07610026

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Segala puji bagi Allah swt yang telah memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulisan tugas akhir ini yang berjudul *”Ideal-ideal pada Aljabar BCI P-semisimple yang Terbangun dari Karakterisasi Grup Modulo n*” dapat terselesaikan. Salawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad saw yang telah mengantarkan umat manusia untuk sadar akan jalan yang benar, yakni agama Islam.

Penulis pun sadar, bahwa dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak akan dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si, selaku dosen pembimbing yang dengan sabar memberi bimbingan, arahan, penjelasan dan motivasi dalam penulisan skripsi ini.

5. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, selaku dosen pembimbing agama yang telah membimbing dan memberikan penjelasan dalam penulisan skripsi ini.
6. Seluruh dosen dan staf Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmunya selama ini dan memberi motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
7. Seluruh guru-guru penulis dari tingkat Taman Kanak-Kanak (TK), Sekolah Dasar (SD), Sekolah Menengah Pertama (SMP), dan Madrasah Aliyah (MA) yang telah berjasa atas perjalanan intelektual penulis.
8. Seluruh *ustadz-ustadzah* pondok pesantren As-Syidiqiyah lubuk seberuk dan Sabilul Hasanah Km. 24 Palembang Sum-Sel, yang telah berjasa atas perjalanan spiritual penulis.
9. Bapak dan Ibu tercinta serta seluruh keluarga, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spiritual dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Adik tersayang Yesi Zahrotul Khoiriyah dan Muhammad Farij Musyafa' yang telah memberi semangat dan motivasi dalam proses penyusunan skripsi ini.
11. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2007 Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan dukungan dalam penelitian dan penyusunan skripsi ini.
12. Teman-teman kost Sumbersari 3b. 165 yang banyak memotivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

13. Efendi Saputra yang selalu memberi semangat dan memotivasi penulis dalam proses penyusunan skripsi ini.
14. Kakak Yusuf Hendriyanto yang senantiasa memberi arahan dan bimbingan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
15. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amin.

Malang, 14 Juli 2011

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III: PEMBAHASAN

BAB IV: PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{G}$	: Sebarang Himpunan Tak Kosong
$\mathbb{Z}$	: Himpunan Bilangan Bulat
$*$	: Operasi pada Aljabar BCI
$\circ$	: Operasi biner pada Grup
$+$	: Operasi penjumlahan
e	: Elemen Identitas
x^{-1}	: Invers dari x
A^c	: Komplemen dari A
$\cup$	: Gabungan
$\cap$	: Irisan
$\emptyset$	: Himpunan Kosong
$\in$	: Anggota Himpunan
$\leq$ atau $\geq$	: Relasi Pengurutan Parsial
$\subseteq$	: Himpunan Bagian (dapat bermakna $\subset$ dan =)
$(X,*,0)$	: Aljabar X yang dibangun oleh operasi biner "$*$" dan elemen khusus 0
$(M_n,*,0)$	: Aljabar Grup modulo n yang dibangun oleh operasi biner "$*$" dan elemen khusus 0

ABSTRAK

Endah, Lusi Sarwo. 2011. **Ideal-ideal pada Aljabar BCI *P*-semisimple yang Terbangun dari Karakteisasi Grup Modulo n**. Skripsi, Program S-1 Jurusan Matematika Fakultas Saints dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing I: Drs. H. Turmudi, M.Si
Pembimbing II: Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: Aljabar BCI yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*, Aljabar BCI *P-semisimple* dari Grup Modulo *n*, Ideal Pada Aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*.

Pada penelitian sebelumnya, Syaidah (2011: 71) telah dibentuk sebuah teorema "Diberikan $(M_n, +)$ adalah Grup dengan M_n adalah himpunan bilangan modulo *n* dengan $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan operasi $" * "$ dengan $x * y = x + (-y)$ dimana $(-y)$ adalah elemen invers dari y terhadap operasi $" + "$. Maka $(M_n, *, 0)$ adalah Aljabar BCI". Bersamaan dengan terbentuknya aljabar BCI dari karakterisasi grup modulo *n* tersebut, maka memungkinkan untuk diteliti lebih lanjut berkaitan dengan aljabar BCI seperti aljabar BCI *P-semisimple* dari karakterisasi grup modulo *n*, ideal-ideal yang ada pada BCI *P-semisimple* yang terbentuk dari karakterisasi grup modulo *n*.

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode kajian kepustakaan atau studi literatur. Kajian yang digunakan dalam penelitian ini adalah definisi dan teorema Aljabar BCI, *P-semisimple*, ideal-ideal pada Aljabar BCI *P-semisimple*.

Pembahasan berisi tentang pembuktian bahwa Aljabar BCI yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n* adalah aljabar BCI *P-semisimple*, Aljabar BCI *P-semisimple* memiliki ideal dengan syarat subset harus sama dengan himpunannya $(I = M_n)$, ideal-ideal yang terdapat pada Aljabar BCI *P-semisimple* adalah ideal-ideal yang memungkinkan syarat $(I = M_n)$ terjadi (*q*-ideal, *a*-ideal, *p*-ideal, *fantastic*-ideal). Sifat opersi $" * "$ pada ideal aljabar BCI yang terbentuk dari karakterisasi grup modulo *n* ini adalah tertutup, tidak assosiatif, tidak komutatif, tidak memiliki identitas dan invers. Sedangkan untuk perbandingan antar ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo ini adalah sama (=), sehingga irisan antar ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n* ini adalah sama dengan himpunan kosong $\{\emptyset\}$.

ABSTRACT

Endah, Lusi Sarwo. 2011. **Ideals of *P-semisimple* BCI-algebra Contructed of Characterisation Grup Modulo *n***. Thesis of mathematics depatrement of science and technology of State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisor I: Drs. H. Turmudi, M.Si
Advisot II: Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: BCI-algebra constructed of characterisation grup modulo *n*, *P-semisimple* BCI-algebra of grup modulo *n*, ideals of *P-semisimple* BCI-algebra contructed of characterisation grup modulo *n*.

The last research of Syaidah (2011:71) was constructed a theorem "Let $(M_n, +)$ is grup, with M_n is modulo set ($n \in \mathbb{N}$). Define $" * "$ as $x * y = x + (-y)$ where $(-y)$ is invers element of y to $" + "$. Than $(M_n, *, 0)$ called BCI-algebra". Together with that contructed of BCI-algebra, than posiblelities for next research of *P-semisimple* BCI-algebra and ideals of *Psemisimple* BCI-algebra contructed of characterisation grup modulo *n*.

This research is experimental by using library research. Using define and theorems of BCI-algebra, *P-semisimple* BCI-algebra and ideals of *P-semisimple* BCI-algebra.

The results of research showed that BCI-algebra constructed of characterisation grup modulo *n* is *P-semisimple* BCI-algebra and than *P-semisimple* BCI-algebra have ideals with condotion subset have to same with the set $(I = M_n)$. Ideals of *P-semisimple* BCI-algebra contructed of characterisation grup modulo *n* is enable ideals with condition $I = M_n$ consist (*q*-ideal, *a*-ideal, *p*-ideal, *fantastic*-ideal). Operation $" * "$ at ideals of *Psemisimple* BCI-algebra contructed of characterisation grup modulo *n* is closed (no assosiatif, comutatif, identities and invers). Sufficient for consideration of ideals *Psemisimple* BCI-algebra contructed of characterisation grup modulo *n* is equal (=) and intersection of ideal is empty set $\{\emptyset\}$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakaan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussyakir.2007:79-80).

Diantara ayat-ayat yang menjelaskan tentang adanya ilmu matematika adalah Al-Quran surat Al A’raf ayat 54, Al Muzzammil ayat 20 dan Al Kahfi ayat 25 disebutkan

إِنَّ رَبَّكُمُ ٱللَّهُ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ فِى سِتَّةِ أَيَّامٍ ثُمَّ ٱسْتَوَىٰ عَلَى ٱلْعَرْشِ يُغْشِى ٱلَّيْلَ ٱلنَّهَارَ يَطْلُبُهُۥ حَثِيثًا وَٱلشَّمْسَ وَٱلْقَمَرَ وَٱلنُّجُومَ مُسَخَّرَٰتٍۭ بِأَمْرِهِۦٓ ۗ أَلَا لَهُ ٱلْخَلْقُ وَٱلْأَمْرُ ۗ تَبَارَكَ ٱللَّهُ رَبُّ ٱلْعَـٰلَمِينَ ﴿٥٤﴾

Artinya : *Sesungguhnya Tuhan kamu ialah Allah yang Telah menciptakan langit dan bumi dalam enam masa, lalu dia bersemayam di atas 'Arsy. dia menutupkan malam kepada siang yang mengikutinya dengan cepat, dan (diciptakan-Nya pula) matahari, bulan dan bintang-bintang (masing-masing) tunduk kepada perintah-Nya. Ingatlah, menciptakan dan memerintah hanyalah hak Allah. Maha Suci Allah, Tuhan semesta alam* (Al-A’raf: 54).

۞ إِنَّ رَبَّكَ يَعْلَمُ أَنَّكَ تَقُومُ أَدْنَىٰ مِن ثُلُثَيِ ٱلَّيْلِ وَنِصْفَهُۥ وَثُلُثَهُۥ وَطَآئِفَةٌ مِّنَ ٱلَّذِينَ مَعَكَ ۚ وَٱللَّهُ يُقَدِّرُ ٱلَّيْلَ وَٱلنَّهَارَ ۚ عَلِمَ أَن لَّن تُحْصُوهُ فَتَابَ عَلَيْكُمْ ۖ فَٱقْرَءُوا۟ مَا تَيَسَّرَ مِنَ ٱلْقُرْءَانِ ۚ عَلِمَ أَن سَيَكُونُ مِنكُم مَّرْضَىٰ ۙ وَءَاخَرُونَ يَضْرِبُونَ فِى ٱلْأَرْضِ يَبْتَغُونَ مِن فَضْلِ ٱللَّهِ ۙ وَءَاخَرُونَ يُقَٰتِلُونَ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ ۖ فَٱقْرَءُوا۟ مَا تَيَسَّرَ مِنْهُ ۚ وَأَقِيمُوا۟ ٱلصَّلَوٰةَ وَءَاتُوا۟ ٱلزَّكَوٰةَ وَأَقْرِضُوا۟ ٱللَّهَ قَرْضًا حَسَنًا ۚ وَمَا تُقَدِّمُوا۟ لِأَنفُسِكُم مِّنْ خَيْرٍ تَجِدُوهُ عِندَ ٱللَّهِ هُوَ خَيْرًا وَأَعْظَمَ أَجْرًا ۚ وَٱسْتَغْفِرُوا۟ ٱللَّهَ ۖ إِنَّ ٱللَّهَ غَفُورٌ رَّحِيمٌۢ ﴿٢٠﴾

Artinya: *Sesungguhnya Tuhanmu mengetahui bahwasanya kamu berdiri (sembahyang) kurang dari dua pertiga malam, atau seperdua malam atau sepertiganya dan (demikian pula) segolongan dari orang-orang yang bersama kamu. dan Allah menetapkan ukuran malam dan siang. Allah mengetahui bahwa kamu sekali-kali tidak dapat menentukan batas-batas waktu-waktu itu, Maka dia memberi keringanan kepadamu, Karena itu Bacalah apa yang mudah (bagimu) dari Al Quran. dia mengetahui bahwa akan ada di antara kamu orang-orang yang sakit dan orang-orang yang berjalan di muka bumi mencari sebagian karunia Allah; dan orang-orang yang lain lagi berperang di jalan Allah, Maka Bacalah apa yang mudah (bagimu) dari Al Quran dan Dirikanlah sembahyang, tunaikanlah zakat dan berikanlah pinjaman kepada Allah pinjaman yang baik. dan kebaikan apa saja yang kamu perbuat untuk dirimu niscaya kamu memperoleh (balasan)nya di sisi Allah sebagai balasan yang paling baik dan yang paling besar pahalanya. dan mohonlah ampunan kepada Allah; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang* (Al Muzzammil: 20).

وَلَبِثُوا۟ فِى كَهْفِهِمْ ثَلَٰثَ مِا۟ئَةٍ سِنِينَ وَٱزْدَادُوا۟ تِسْعًا ﴿٢٥﴾

Artinya: *Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi)* (QS. Al-Kahfi: 25)

Dari tiga contoh ayat Al-Quran di atas, maka jelaslah bahwa dalam Al-Quran telah banyak disinggung mengenai keberadaan matematika. Namun kita sendiri sebagai umat islam jarang yang mampu menangkap isyarat atau ilmu yang telah tersirat dalam Al-Quran . Lebih jauh lagi, ayat ke tiga di atas yaitu surat Al-Kahfi ayat 25 yang menegaskan tentang lamanya Ashabul Kahfi berada dalam gua "*Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi)*". Dari ayat tersebut terdapat operasi penjumlahan yaitu *tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun*. Hanya saja, agar lebih mudah pernyataan-pernyataan seperti *tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun* itu dalam dunia matematika sering dinotasikan dengan menggunakan simbol-simbol (angka, huruf dan simbol matematika lainnya).

Salah satu cabang matematika yang banyak melibatkan simbol-simbol dalam pengkajiannya adalah Aljabar. Sedangkan cabang dari Aljabar itu sendiri antara lain aljabar linier dan aljabar abstrak. Aljabar abstrak memiliki banyak materi yang dibahas dan dikembangkan. Struktur aljabar merupakan salah satu materi dalam aljabar abstrak. Selain pemetaan, materi yang dibahas pada struktur aljabar pada dasarnya tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan yang tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya dan juga oleh operasi biner yang lainnya. Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol.

Seiring perkembangan ilmu pengetahuan, simbol-simbol yang telah ada juga tak luput menjadi objek penelitian. Seperti Pada tahun 1966, Y. Imai dan K. Iseki memperkenalkan perkembangan dari struktur aljabar abstrak yaitu Aljabar BCK. Pada tahun yang sama, K. Iseki memperkenalkan gagasan baru yaitu Aljabar BCI yang merupakan perumuman dari Aljabar BCK sehingga Aljabar BCK termuat di dalam Aljabar BCI (Ahn & Kim, 1996: 1). Ilmu baru ini belum ada pada masa-masa sebelumnya dan baru diperkenalkan pada tahun 1966. Dari tahun ke tahun, ilmu pengetahuan berkembang semakin pesat begitu juga dengan Aljabar BCI.

Pada penelitian sebelumnya, Syaidah (2011: 71) telah dibentuk sebuah teorema "Diberikan $(M_n, +)$ adalah Grup dengan M_n adalah himpunan bilangan modulo *n* dengan $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan operasi $" * "$ dengan $x * y = x + (-y)$ dimana $(-y)$ adalah elemen invers dari y terhadap operasi $" + "$. Maka $(M_n, *, 0)$ adalah Aljabar BCI".

Bersamaan dengan terbentuknya aljabar BCI dari karakterisasi grup modulo *n* tersebut, maka memungkinkan untuk diteliti lebih lanjut berkaitan dengan aljabar BCI seperti *P-semisimple*, ideal-ideal yang ada pada BCI *P-semisimple*, dan lain-lain.

Bhatti (1991:) dalam thesisnya menyatakan bahwa " jika X adalah aljabar BCI, maka X adalah juga aljabar BCI *P-semisimple*". Hal ini dapat bermakna bahwa aljabar BCI X akuivalen dengan aljabar BCI *P-semisimple* karena sesuai dengan definisi aljabar BCI *P-semisimple*. (Bhatti, 1991:1) "misalkan X adalah aljabar BCI dan misalkan ada $M = \{0 * x = 0; x \in X\}$

yang kemudian setelah diteliti M hanya memiliki satu anggota yaitu 0 ($M = \{0\}$) maka X disebut aljabar BCI *P-semisimple*" maka jelaslah aljabar BCI X akuivalen dengan aljabar BCI *P-semisimple*. Karena aljabar BCI melibatkan himpunan tak kosong, maka sesuai dengan definisi yang dipaparkan Munir (2009: 54) " himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki satupun elemen atau himpunan dengan kardinal = 0" juga bermakna bahwa himpunan tak kosong adalah himpunan yang memuat minimal satu anggota. Contoh : himpunan nol $\{0\}$ hanya beranggotakan nol saja disebut himpunan tak kosong, karena minimal ada satu anggota yakni nol. Sebuah himpunan tak kosong pasti bias di cari *subset*-nya walaupun terkadang subset tersebut adalah dirinya sendiri. Enderton (1997: 3) mengatakan "suatu himpunan A dikatakan *subset* dari B (ditulis $A \subseteq B$) jika untuk setiap elemen A juga elemen B ($\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$) atau dapat juga ditulis $A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x(x \in A \rightarrow x \in B))$. Suatu himpunan adalah *subset* dari dirinya sendiri dan himpunan kosong adalah *subset* dari setiap himpunan".

Subset pada himpunan tak kosong bisa lebih dari satu. Contoh : Himpunan A = {1,2,3,4} *subse-t*nya bisa berupa himpunan $a = \{1\}$, $b = \{2\}$, $c = \{3\}$, $d = \{4\}$, $e = \{1,2\}$, $e = \{1,3\}$, $f = \{1,4\}$, $g = \{2,3\}$, $h = \{2,4\}$, $i = \{1,2,3\}$, $j = \{2,3,4\}$, $k = \{1,2,3,4\}$. Oleh karenanya, anggapan ini juga berlaku untuk himpunan tak kosong pada aljabar BCI yang pada skripsi sebelumnya telah dibangun dari karakterisasi grup modulo n.

Bhatti (1991: 2) dalam thesisnya mengatakan " misalkan X adalah BCI aljabar dan terdapat himpunan bagian A dari X ($A \subset X$). A dikatakan *ideal* jika i) $0 \in$

$A;\ ii)\ x * y, y \in A \rightarrow x \in A. untuk\ y \in A, x \leq y \rightarrow x \in A$". Berawal dari pengetahuan tersebut, penulis ingin mengetahui lebih banyak tentang ideal yang terdapat pada aljabar BCI *P-semisimple* yang telah terkonstruksi dari grup modulo pada skripsi sebelumnya. Sehingga skripsi ini penulis beri judul "**ideal-ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n***"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana menentukan ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*?
2. Ideal apa saja yang mungkin terbentuk dari aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*?
3. Bagaimana sifat-sifat yang terbentuk dari ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah :

1. Menentukan ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*
2. Mengetahui ideal yang mungkin terbentuk dari aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*

3. Mengetahui sifat-sifat yang terbentuk dari ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo n

1.4 Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini, penulis berharap pembahasan skripsi ini bisa bermanfaat bagi berbagai kalangan, diantaranaya:

1) Bagi Penulis

   Untuk lebih mengenal, mempelajari, memahami dan mengembangkan disiplin ilmu yang telah dipelajari khususnya mengenai ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbentuk dari karakterisasi grup modulo n.

2) Bagi Pembaca

   Sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang ideal *P-semisimple* yang terbentuk dari karakterisasi grup modulo $\underline{n}$.

3) Bagi Instansi

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah aljabar.

1.5 Batasan Masalah

Agar penulisan skripsi ini tidak meluas, maka penulis membatasi bembahasan masalah skripsi ini pada *ideal* aljabar BCI *P-semisimple* yang terbentuk dari karakterisasi grup modulo n.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data (berupa definisi dan teorema) yang berkenaan dengan pembahasan masalah tersebut. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. Mengumpulkan kajian-kajian dari buku, jurnal-jurnal dan hasil penelitian yang berhubungan dengan *ideal* pada *Aljabar BCI P-semisimple.*
2. Mengidentifikasi definisi-definisi yang berhubungan dengan *ideal* pada *Aljabar BCI P-semisimple.*
3. Melalukan pengujian *ideal* terhadap aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*.
4. Menganalisis dan mengkategorikan jenis-jenis ideal yang terdapat pada aljabar BCI *P-semisimple*.
5. Melakukan pengujian dan analisis terhadap irisan antar ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*.
6. Dari hasil analisis yang diperoleh, kemudian disajikan dalam bentuk teorema.
7. Membuktikan teorema yang diperoleh disertai dengan contoh.
8. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.
9. Melaporkan

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca dan memberikan gambaran secara umum tentang masalah yang diangkat dalam skripsi ini, maka diberikan sistematika penulisan sebagai berikut :

BAB I Merupakan pendahuluan, yang berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Berisi dasar-dasar teori yang sesuai dengan masalah yang dibahas, diantaranya adalah definisi himpunan (*set*), himpunan bagian (*subset*), operasi-operasi pada himpunan, relasi, fungsi, grup dan subgrup, sifat-sifat grup, bilangan bulat modulo *n*, aljabar BCI dari skripsi sebelumnya, dan konsep aljabar BCI dalam Islam.

BAB III Dijelaskan tentang penentuan *P-semisimple* dari aljabar BCI yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*, ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*, ideal-ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*, sifat-sifat yang terbentuk dari ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* dari grup modulo *n* dan pola ideal aljabar BCI *P-semisimple* dalam Al-Quran.

BAB IV Merupakan penutup skripsi, yang berisi kesimpulan dari keseluruhan pembahasan skripsi dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan (*set*)

Definisi 2.1.1

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 1).

Sedangakan Liu (1986) dalam Siang (2006: 131) mengatakan "Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek yang berbeda". Lebih jauh lagi Enderton (1977: 1) mendefinisikan "himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek tertentu (objek yang menyusun himpunan disebut anggota atau elemen). t adalah anggota dari himpunan A, kemudian dapat ditulis $t \in A$ dan t bukan anggota A dapat ditulis $t \notin A$.

Contoh 2.1.2

Hewan-hewan peliharaan di rumah = {anjing, kucing, burung, kelinci}.

Definisi 2.1.3

Misalkan A adalah sebuah himpunan, maka A dapat dinyatakan dengan 4 cara. Yaitu:

1. Enumerasi (mendaftar)

   Jika sebuah himpunan terbatas dan tidak terlalu besar, kita bisa menyajikan himpunan dengan cara mengenumerasi, artinya menuliskan semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal. Bisaanya suatu himpunan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital maupun dengan menggunakan simbol-simbol lain.

Contoh:

Himpunan A yang berisi empat anggota 1, 2, 3, dan empat dapat ditulis sebagai A={1, 2, 3, 4}.

2. Simbol-simbol baku

Beberapa himpunan yang khusus dituliskan dengan simbol-simbol yang sudah baku. Terdapat sejumlah simbol baku yang berbentuk huruf tebal (*boldface*) yang bisaa digunakan untuk mendefinisikan himpunan yang sering digunakan, antara lain :

$\mathbb{N}$ = Himpunan bilangan Asli = {1, 2, …}

$\mathbb{Z}$ = Himpunan bilangan bulat = {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}

$\mathbb{Q}$ = Himpunan bilangan rasional

$\mathbb{R}$ = Himpunan bilangan Riil

$\mathbb{C}$ = Himpunan bilangan kompleks

Contoh:

Didefinisikan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli kurang dari 9. Maka $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\ ,6\}$.

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Cara lain menyajikan himpunan adalah dengan notasi pembentuk himpunan (*set builder*). Dengan cara penyajian ini, himpunan dinyatakan dengan menulis syarat yang harus dipenuhi oleh anggota.

Notasi : $\{x|\text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x\}$

Aturan yang digunakan dalam penulisan syarat keanggotaan :

a. Bagian di kiri tanda ‘|’ melambangkan elemen himpunan.

b. Tanda ‘|’ dibaca *dimana* atau *sedemikian sehingga*.

c. Bagian di kana tanda ‘|’ menunjukkan syarat keanggota’an himpunan.

d. Setiap tanda ‘,’ di dalam syarat keanggotaan dibaca sebagai *dan*.

Contoh:

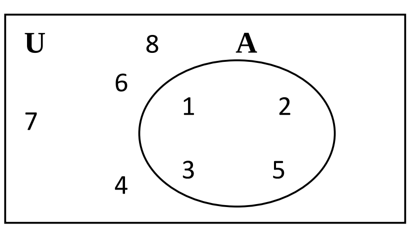
Misalkan didefinisikan A adalah himpunan hewan berkaki 4 (rusa, kucing, anjing, kambing, dll), maka dapat dinotasikan $A = \{x|\text{hewan berkaki empat}\}$

4. Diagram Venn

Diagram Venn menyajikan himpunan secara grafis. Cara penyajian himpunan ini diperkenalkan oleh matematikawan Inggris yang bernama John Venn pada tahun 1881. Di dalam diagram Venn, himpunan semesta (U) digambarkan sebagai suatu segi empat sedangkan himpunan lainnya digambarkan sebagai lingkaran di dalam segi empat tersebut.

Contoh :

Misalkan U = {1, 2, 3,…, 7, 8}, A = {1, 2, 3, 5}. Kedua himpunan tersebut dapat di gambarkan dengan diagram Venn sebagai berikut :



Gambar 2.1: Diagram Venn

Munir (2009: 48-49).

2.2 Himpunan Bagian (*subset*)

Enderton (1997: 3) mengatakan "suatu himpunan A dikatakan *subset* dari B (ditulis $A \subseteq B$) jika untuk setiap elemen A juga elemen B $(\forall x(x \in A \rightarrow x \in B))$ atau dapat juga ditulis $A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x(x \in A \rightarrow x \in B))$. Suatu himpunan adalah *subset* dari dirinya sendiri dan himpunan kosong adalah *subset* dari setiap himpunan".

Raisinghania dan Aggarwal (1980: 3) menambahkan "

a. jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ maka kita katakana A dan B sama (*Equal*) dan ditulis $A = B$.

b. Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$, maka kita katakana A adalah *proper subset* dari B dan kita tulis $A \subset B$.

c. Jika A bukan *subset* dari B, maka ditulis $A \nsubseteq B$.

d. Dua himpunan A dan B dengan syarat $A \subseteq B$ atau $B \subseteq A$ maka dikatakan A dan B *comparable*. Namun sebaliknya, jika $A \nsubseteq B$ dan $B \nsubseteq A$ maka dikatakan A dan B *non-comparable*.

e. Himpunan A dan B dikatakan *disjoint* jika tidak ada elemen A yang termuat di B dan tidak ada elemen B termuat di A ($A \cap B = \emptyset$).

Contoh 2.2.1

Diketahui himpunan $B = \{0,1,2,3,4\}$ dan $A = \{0,2\}$. Maka $A \subset B$.

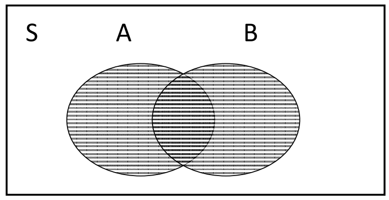
2.3 Operasi-operasi pada himpunan

Definisi 2.3.1

Gabungan dua buah himpunan A dan B (ditulis $A \cup B$) adalah himpunan semua elemen-elemen anggota A atau anggota B.

$$A \cup B = \{x \in S | x \in A \vee x \in B\}$$

Himpunan $A \cup B$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2 : Diagram Venn A∪B
(Daerah yang diarsir ganda merupakan himpunan $A \cup B$)

Siang (2006: 138)

Contoh 2.3.2

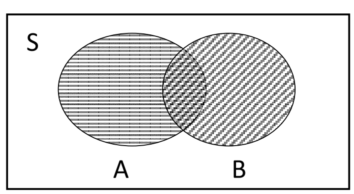
Diketahui himpunan $M = \{0,1\}$ dan $S = \{2\}$, maka $M \cup S = \{0,1,2\}$.

Definisi 2.3.3

Irisan dua himpunan A dan B adalah himpunan semua elemen yang menjadi anggota A dan juga menjadi anggota B. himpunan baru ini disebut irisan himpunan A dan B, dan disajikan dengan tanda $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in S | x \in A \wedge x \in B\}$$

Himpunan $A \cap B$ dinyatakan pada gambar berikut:



Gambar 2.3: Diagram Venn $A \cap B$ (Derah yang diarsir ganda menunjukkan $A \cap B$).

(Soebagio,1993: 16)

Contoh 2.3.4

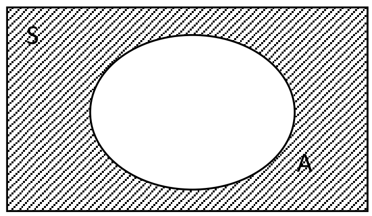
Diketahui himpunan $T = \{0,1,2\}$ dan $P = \{2\}$, maka $M \cap P = \{2\}$.

Definisi 2.3.5

Komplemen himpunan A (ditulis A^c) adalah himpunan semua elemen x dalam S sedemikian sehingga x bukan anggota A.

$$A^c = \{x \in S | x \notin A\}$$

Daerah yang diarsir pada gambar berikut menunjukkan A^c



Gambar 2..4 : Diagram Venn A^c

Siang (2006: 139)

Contoh 2.3.6

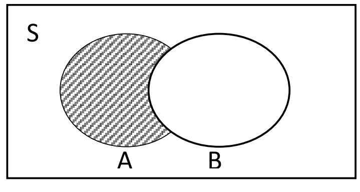
Didefinisikan himpunan semesta $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dan $A = \{0, 1\}$, maka $A^c = \{2, 3, 4\}$.

Definisi 2.3.7

Selisih himpunan B dari himpunan A (simbol A-B) adalah himpunan semua elemen x dalam S sedemikian sehingga x anggota A, tetapi bukan anggota B.

$$A - B = \{x \in S | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Daerah yang diarsir pada gambar berikut menunjukkan $A - B$



Gambar 2.5 : Diagram Venn $A - B$

Siang (2006: 139-140)

Contoh 2.3.8

Didefinisikan himpunan semesta $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dan $A = \{0, 1\}$, maka $S - A = \{2, 3, 4\}$.

2.4 Relasi

Definisi 2.4.1

Relasi biner $\mathcal{R}$ antara *A* dan *B* adalah himpunan bagian dari $A \times B$

Notasi : $A \times B = \{(a, b) |\ a \in A, b \in B\}$

Dengan kata lain, relasi biner dari *A* ke *B* adalah *R* yang menghubungkan anggota A dengan anggota B. Notasi $a\,\mathcal{R}\,b$ untuk menunjukkan bahwa $(a, b) \in \mathcal{R}$ dan $a \not\mathcal{R}\, b$ untuk menunjukkan bahwa $(a, b) \notin \mathcal{R}$. Selanjutnya, ketika (a, b) termasuk ke $\mathcal{R}$, maka dikatakan a dihubungkan ke b oleh $\mathcal{R}$ (Munir, 2009: 103).

Contoh 2.4.2

Misal $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan didefinisikan bahwa $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\ dan\ a < b\}$ .Maka

$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 4), (1,6), (1, 8), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 4), (3, 6), (4, 8)\}$.

Definisi 2.4.3

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah suatu relasi pada himpunan A. $\mathcal{R}$ disebut relasi yang :

a. Refleksif $\leftrightarrow$ $(\forall x \in A)\ \ x\,\mathcal{R}\,x$

b. Simetris $\leftrightarrow$ $(\forall x, y \in A)\ \ x\,\mathcal{R}\,y \rightarrow y\,\mathcal{R}\,x$

c. Transitif $\leftrightarrow$ $(\forall x, y, z \in A)\ \ (x\,\mathcal{R}\,y\ dan\ y\,\mathcal{R}\,z) \rightarrow x\,\mathcal{R}\,z$

d. Irrefleksif $\leftrightarrow (\forall x \in A)\ x \not\mathcal{R}\, x$

e. Asimetris $\leftrightarrow (\forall x, y \in A)\ x\, \mathcal{R}\, y \rightarrow y \not\mathcal{R}\, x$

f. Antisimetris $\leftrightarrow (\forall x, y \in A)\ (x\, \mathcal{R}\, y\ dan\ y\, \mathcal{R}\, x) \rightarrow x = y$

(Siang, 2006: 340-341)

Contoh 2.4.4

Misal $A = \mathbb{Z}$, himpunan bilangan bulat, dan misalkan

$$\mathcal{R} = \left\{\{a, b\} \epsilon A\ \times A \middle| a < b\right\}$$

$\mathcal{R}$ adalah relasi kurang daripada. Maka $\mathcal{R}$

Simetris : jika $a < b$, maka tidak benar bahwa $b < a$, jadi $\mathcal{R}$ *Antisimetris*.

Asimetris: jika $a < b$, maka $b \nless a$ (b tidak kurang daripada a), jadi $\mathcal{R}$ adalah *Asimetris*.

Antisimetris: jika $a \neq b$, maka terdapat $a \nless b$ atau $b \nless a$, jadi $\mathcal{R}$ *Antisimetris.*

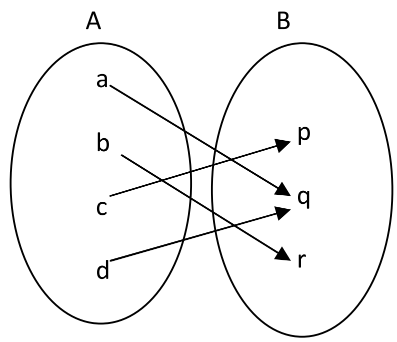
2.5 Fungsi

Definisi 2.5.1

Misal X dan Y sebarang himpunan. Misal f adalah suatu fungsi dari himpunan X ke himpunan Y (simbol $f : A \rightarrow B$) adalah suatu relasi dari X ke Y dengan syarat bahwa setiap elemen $x \in X$ memiliki kawan yang tunggal di Y. X disebut daerah asal (*domain*) f dengan f (x) dibaca "harga fungsi di x". Himpunan semua harga fungsi f disebut daerah hasil (*range*) f (Siang, 2006: 423).

Contoh 2.5.2

Misalkan A = {a,b,c,d,e} dan B = {p,q,r,s,t}. Fungsi f : A→B ditentukan oleh diagram berikut :



Gambar 2.6 : Fungsi f : A → B

Pada gambar, f merukan suatu fungsi dari A ke B dan R_f = {p,q,r}

Definisi 2.5.3

Misalkan i adalah suatu fungsi dari himpunan X ke himpunan X yang didefinisikan dengan aturan $i = X \rightarrow X$ dengan $i(x) = x$. Fungsi i desebut fungsi identitas pada X karena i mengawankan setiap elemen X ke elemen yang sama. Jadi, seolah-olah fungsi i tidak memberikan efek apapun.

Definisi 2.5.4

Suatu fungsi f : $X \rightarrow Y$ disebut fungsi konstan jika f mengawankan semua $x \in X$ ke satu anggota $Y_0 \in Y$. Nilai fungsi semua anggota X selalu sama yaitu Y_0. Jadi $f(x) = Y_0; \forall x \in X$.

2.6 Grup dan Subgrup

Definisi 2.6.1

(1) Operasi biner * pada himpunan G adalah fungsi $*: G \times G \rightarrow G$. untuk setiap $a, b \in G$. Kita tuliskan $a * b$ untuk $*\,(a, b)$.

(2) Operasi biner * pada himpunan G adalah asosiatif jika untuk setiap $a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$.

(3) Jika * adalah operasi biner pada himpunan G, kita katakan $a, b \in G$ komutatif jika $a * b = b * a$. Kita katakan * (atau G) adalah komutatif jika untuk setiap $a, b \in G, a * b = b * a$ (Dummit & Foote , 1991:17).

Definisi 2.6.2

Suatu grup $(G,*)$ adalah suatu himpunan G dengan suatu operasi biner "$*$" yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. Tertutup terhadap operasi "$*$", yaitu $a * b \in G, \forall\ a, b \in G$

b. Operasi "$*$" bersifat assosiatif, yaitu $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$

c. Ada elemen identitas e dalam G sedemikian sehingga: $a * e = e * a = a$, $\forall\ a \in G$

d. Setiap elemen $a \in G$ mempunyai elemen invers a^{-1} sedemikian sehingga: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (Wahyudin, 1989:66).

Contoh 2.6.3

Selidiki apakah $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup?

Jawab:

i. Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

ii. Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

iii. $\exists\, 0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall\, a \in \mathbb{Z}$. Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.

iv. Untuk masing-masing $a \in \mathbb{Z}$ ada $(-a) \in \mathbb{Z}$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Jadi invers dari a adalah $-a$.

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Definisi 2.6.4

Grup $(G,*)$ disebut grup abelian atau grup komutatif jika pada operasi biner "$*$", G bersifat komutatif, yaitu $a * b = b * a, \forall\, a, b \in G$ (Soebagio, 1993: 143).

Contoh 2.6.5

Selidiki apakah $(\mathbb{Z}, +)$ pada **contoh 2.6.3** merupakan grup Abel.

Jawab:

Ambil $1, 2 \in \mathbb{Z}$ maka berlaku $1 + 2 = 2 + 1$. Karena $1 + 2 = 3$ dan $2 + 1 = 3$ maka terbukti komutatif.

Definisi 2.6.6

Misalkan $(\mathbb{G},\circ)$ suatu grup. S disebut subgroup dari $\mathbb{G}$ jika dan hanya jika $S \subset \mathbb{G}$ dan $(S,\circ)$ merupakan suatu grup (Soebagio, 1993: 160).

2.7 Sifat-sifat grup

Teorema 2.7.1

Elemen identitas dalam suatu grup adalah tunggal (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:75).

Bukti :

Misal ($\mathbb{G}$,$\circ$) adalah grup.

Andaikan *e* dan *e*' adalah elemen identitas ($e \neq e'$) maka berlaku:

i. $e \circ e' = e' \circ e = e'$ (*e* sebagai identitas)

ii. $e \circ e' = e' \circ e = e$ (*e*' sebagai identitas)

Karena $e \circ e'$ dan $e' \circ e$ adalah elemen tunggal pada $\mathbb{G}$ maka i dan ii berakibat *e* = *e*' (kontradiksi dengan pengandaian). Hal ini berarti bahwa elemen identitas di $\mathbb{G}$ adalah tunggal.

Teorema 2.7.2

Setiap elemen dari suatu grup memiliki invers yang tunggal (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:75).

Bukti:

Misal ($\mathbb{G}$,$\circ$) adalah grup dan *e* adalah elemen identitas di $\mathbb{G}$. Akan dibuktikan setiap elemen dari ($\mathbb{G}$,$\circ$) mempunyai invers tunggal.

Andaikan invers dari $a \in \mathbb{G}$ tifak tunggal yaitu a_1^{-1} dan a_2^{-1} dengan $a_1^{-1} \neq a_2^{-1}$

Misal *e* adalah elemen identitas di $\mathbb{G}$ maka berlaku:

$$a \circ a_1^{-1} = a_1^{-1} \circ a = e \text{......................(i)}$$

$$a \circ a_2^{-1} = a_2^{-1} \circ a = e \text{.....................(ii)}$$

Selanjutnya $a_1^{-1} \circ (a \circ a_2^{-1}) = a_1^{-1} \circ e = a_1^{-1}$................(iii)

dan $(a_1^{-1} \circ a) \circ a_2^{-1} = e \circ a_2^{-1} = a_2^{-1}$................ (iv)

karena operasi $\circ$ bersifat asosiatif di $\mathbb{G}$ yang berarti bahwa

$$a_1^{-1} \circ (a \circ a_2^{-1}) = (a_1^{-1} \circ a) \circ a_2^{-1} \text{...............dari (iii) dan (iv)}$$

$a_1^{-1} = a_2^{-1}$ (Kontradiksi dengan pengandaian)

Hal ini berarti setiap elemen di $\mathbb{G}$ meempunyai invers yang tunggal.

Teorema 2.7.3

Di dalam grup berlaku hukum kanselasi (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:76).

Bukti:

Misal $(\mathbb{G},\circ)$ adalah grup dan $a, b, c \in \mathbb{G}$.

Akan ditunjukkan:

(i) $b \circ a = c \circ a \rightarrow b = c$.................kanselasi kanan

(ii) $a \circ b = a \circ c \rightarrow b = c$................kanselasi kiri

Kasus (i)

$a \in \mathbb{G} \rightarrow a^{-1} \in \mathbb{G}$ (a mempunyai invers yaitu $a^{-1} \in \mathbb{G}$)

$b \circ a = c \circ a$

$(b \circ a) \circ a^{-1} = (c \circ a) \circ a^{-1}$

$b \circ (a \circ a^{-1}) = c \circ (a \circ a^{-1})$

$b \circ e = c \circ e$ (e adalah elemen identitas di $\mathbb{G}$)

$b = c$ (sifat identitas)

Kasus (ii)

$a \circ b = a \circ c$

$a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$

$(a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c$

$e \circ b = e \circ c$

$b = c$

Jadi hukum kanselasi berlaku pada sebarang grup.

Teorema 2.7.4

Invers dari invers suatu elemen dari suatu grup adalah elemen itu sendiri (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:75).

Bukti:

Misal $(\mathbb{G},\circ)$ adalah grup dan e adalah elemen identitas di $\mathbb{G}$. Akan dibuktikan bahwa $(a^{-1})^{-1} = a$.

$a \in \mathbb{G} \rightarrow a^{-1}\mathbb{G}$ sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ (e elemen identitas di $\mathbb{G}$)

(i) $a \circ a^{-1} = e$

$(a \circ a^{-1}) \circ (a^{-1})^{-1} = e \circ (a^{-1})^{-1}$

$a \circ (a^{-1} \circ (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1}$ (asosiatif)

$a \circ e = (a^{-1})^{-1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$

(ii) $a^{-1} \circ a = e$

$(a^{-1})^{-1} \circ (a \circ a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} \circ e$

$((a^{-1})^{-1} \circ a^{-1}) \circ a = (a^{-1})^{-1}$ (asosiatif)

$e \circ a = (a^{-1})^{-1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$

Dari (i) dan (ii) maka $a = (a^{-1})^{-1}$

Teorema 2.7.5

Misal $(\mathbb{G},\circ)$ adalah grup. $\forall\, a, b \in \mathbb{G}$ berlaku $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:76).

Bukti:

Misal $(\mathbb{G},\circ)$ adalah grup. Akan dibuktikan bahwa $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

Andaikan $a, b \in \mathbb{G}$

$\forall\, a, b \in \mathbb{G} \rightarrow a \circ b \in \mathbb{G}$

$a \circ b \in \mathbb{G} \rightarrow (a \circ b)^{-1} \in \mathbb{G}$

Sehingga $(a \circ b) \circ (a \circ b)^{-1} = e$ ....(i)

$\forall\, a, b \in \mathbb{G} \rightarrow a^{-1} \circ b^{-1} \in \mathbb{G}$

Sehingga $(a \circ b) \circ b^{-1} \circ a^{-1} = a \circ (b \circ b^{-1}) \circ a^{-1}$ (Asosiatif)

$(a \circ b) \circ b^{-1} \circ a^{-1} = (a \circ e) \circ a^{-1}$

$(a \circ b) \circ b^{-1} \circ a^{-1} = a \circ a^{-1}$

$(a \circ b) \circ b^{-1} = a^{-1} \circ e$ ....(ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh : $(a \circ b) \circ (a \circ b)^{-1} = (a \circ b) \circ b^{-1} \circ a^{-1}$

maka $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

2.8 Bilangan Bulat Modulo *n*

Definisi 2.8.1

Misalkan s dan t bilangan bulat, dan n bilangan bulat positif. Maka dapat dituliskan $s \equiv t(mod\, n)$ jika n membagi $t - s$. $s \equiv t(mod\, n)$ dibaca "s kongruen t modulo n". Bilangan bulat positif n disebut modulus (Stinson, 1995:3).

2.9 Aljabar BCI

Definisi 2.9.1

Misalkan X adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner "$*$" dan konstanta "0". Maka struktur aljabar $(X, *, 0)$ dikatakan *Aljabar BCI* jika memenuhi:

i. $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0,$

ii. $(x * (x * y)) * y = 0$,

iii. $x * x = 0$,

iv. $x * y = 0 = y * x \rightarrow x = y$,

untuk setiap $x, y, z \in X$ (Saeid, 2010:550).

Teorema 2.9.3

Diberikan $(M_n, +)$ adalah Grup dengan M_n adalah himpunan bilangan modulo n dengan $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan operasi $" * "$ dengan $x * y = x + (-y)$ dimana $(-y)$ adalah elemen invers dari y terhadap operasi $" + "$. Maka $(M_n, *, 0)$ adalah Aljabar BCI (Syaidah, 2011: 71).

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa $(M_n, *, 0)$ adalah Aljabar BCI

Akan diperlihatkan bahwa $(M_n, *, 0)$ memenuhi aksioma Aljabar BCI dengan bantuan entrian tabel Aljabar BCI $(M_n, *, 0)$.

i. $\forall\, a, b, c \in M_n$ maka berlaku $((a * b) * (a * c)) * (c * b) = 0$

$((a * b) * (a * c)) * (c * b) = 0$
$((a + (b)^{-1}) * (a + (c)^{-1})) * (c + (b)^{-1}) = 0$
$\left(\left(a + (n - b)\right) * \left(a + (n - c)\right)\right) * \left(c + (n - b)\right) = 0$
$((a + n - b) * (a + n - c)) * (c + n - b) = 0$
$((a + n - b) + (a + n - c)^{-1}) * (c + n - b) = 0$
$\left((a + n - b) + \left(n - (a - c)\right)\right) * (c + n - b) = 0$
$(2n - b + c) * (c + n - b) = 0$
$(2n - b + c) + (c + n - b)^{-1} = 0$
$(2n - b + c) + \left(n - (c - b)\right) = 0$
$3n - b + c - c + b = 0$
$3n = 0$
Karena $3n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$

Terbukti bahwa $((a * b) * (a * c)) * (c * b) = 0$

ii. $\forall\, a, b \in M_n$ maka berlaku $\big(a * (a * b)\big) * b = 0$

$\big(a * (a * b)\big) * b = 0$
$\big(a * (a + (b)^{-1})\big) * b = 0$
$\Big(a * \big(a + (n - b)\big)\Big) * b = 0$
$\big(a * (a + n - b)\big) * b = 0$
$(a + (a + n - b)^{-1})) * b = 0$
$(a + \big(n - (a - b)\big) * b = 0$
$(a + n - a + b) * b = 0$
$(n + b) + (b)^{-1} = 0$
$(n + b) + (n - b) = 0$
$2n + b - b = 0$
$2n = 0$
Karena $2n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$

Terbukti bahwa $\big(a * (a * b)\big) * b = 0$

iii. $\forall\, a \in M_n$ maka berlaku $a * a = 0$

$a * a = 0$
$a + (a)^{-1} = 0$
$a + (n - a) = 0$
$n = 0$
Karena $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$

Terbukti bahwa $a * a = 0$

iv. $\forall\, a, b \in M_n$ maka berlaku $a * b = 0$ dan $b * a = 0 \rightarrow a = b$

$a * b = 0$	$b * a = 0$
$a + (b)^{-1} = 0$	$b + (a)^{-1} = 0$
$a + (n - b) = 0$	$b + (n - a) = 0$
$a + n - b = 0$	$b + n - a = 0$

Karena $a = b$ maka $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$

Terbukti bahwa $a * b = 0$ dan $b * a = 0 \rightarrow a = b$

Dengan cara lain

$(a - b + n) \rightarrow a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$ dan

$(b - a + n) \rightarrow b \equiv a (\mathrm{mod}\ n)$

Sehingga terbukti bahwa $a = b$.

Contoh 2.9.4

Diberikan grup $(M_3, +)$ dengan $M_3 = \{0, 1, 2\}$ adalah himpunan bilangan modulo 3. Didefinisikan operasi $" * "$ dengan $x * y = x + (-y), \forall x, y \in M_3$, dimana $(-y)$ adalah elemen invers dari y terhadap operasi $" + "$. Tunjukkan bahwa $(M_3, * , 0)$ adalah Aljabar BCI.

Jawab.

Dari operasi $" + "$ dan $" * "$ pada modulo 3, diperoleh tabel berikut ini:

$\rightarrow$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabel 2.1(a) Grup Modulo 3

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Tabel 2.1(b) Aljabar BCI $(M_3, * , 0)$

Pembuktian ini dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu dengan menggunakan bantuan tabel 2.1(a) dan dapat juga dengan tabel 2.1(b).

Cara pertama dengan menggunakan tabel 2.1(a):

Dari tabel 2.1(a) diperoleh invers dari setiap elemen:

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 2$

Invers dari $2 = 2^{-1} = 1$

i. Pilih $x = 2, y = 1,$ dan $z = 0 \rightarrow \big((2 * 1) * (2 * 0)\big) * (0 * 1) = 0$

   Berdasarkan tabel 2.1(a):

$$\big((2 * 1) * (2 * 0)\big) * (0 * 1) = 0$$
$$\big((2 + (1)^{-1}) * (2 + (0)^{-1})\big) * (0 + (1)^{-1}) = 0$$
$$\big((2 + 2) * (2 + 0)\big) * (0 + 2) = 0$$
$$(1 * 2) * 2 = 0$$
$$(1 + (2)^{-1}) * 2 = 0$$
$$(1 + 1) * 2 = 0$$

$2 * 2 = 0$
$2 + (2)^{-1} = 0$
$$2 + 1 = 0$$

ii. Pilih $x = 1$ dan $y = 2 \rightarrow \big(1 * (1 * 2)\big) * 2 = 0$

Berdasarkan tabel 2.1(a):

$\big(1 * (1 * 2)\big) * 2 = 0$
$\big(1 * (1 + (2)^{-1})\big) * 2 = 0$
$\big(1 * (1 + 1)\big) * 2 = 0$
$(1 * 2) * 2 = 0$
$(1 + (2)^{-1}) * 2 = 0$
$(1 + 1) * 2 = 0$
$2 * 2 = 0$
$2 + (2)^{-1} = 0$
$2 + 1 = 0$

iii. Pilih $x = 2 \rightarrow 2 * 2 = 0$

Berdasarkan tabel 2.1(a):

$2 * 2 = 0$
$2 + (2)^{-1} = 0$
$2 + 1 = 0$

iv. Pilih $x = 1$ dan $y = 1 \rightarrow 1 * 1 = 0$ dan $1 * 1 = 0 \rightarrow x = y$

$x * y = 0$	$y * x = 0$
$1 * 1 = 0$	$1 * 1 = 0$
$1 + (1)^{-1} = 0$	$1 + (1)^{-1} = 0$
$1 + 2 = 0$	$1 + 2 = 0$

Dengan menggunakan bantuan tabel 2.1(a), terbukti bahwa $(M_3, *, 0)$ adalah Aljabar BCI. Selanjutnya pembuktian dengan menggunakan tabel 2.1(b) yakni sebagai berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in M_3$, berlaku $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$.

Untuk $x = 0$, maka diperoleh	Untuk $x = 1$, maka diperoleh
$\big((0 * 0) * (0 * 0)\big) * (0 * 0) = 0$	$\big((1 * 0) * (1 * 0)\big) * (0 * 0) = 0$
$\big((0 * 0) * (0 * 1)\big) * (1 * 0) = 0$	$\big((1 * 0) * (1 * 1)\big) * (1 * 0) = 0$
$\big((0 * 0) * (0 * 2)\big) * (2 * 0) = 0$	$\big((1 * 0) * (1 * 2)\big) * (2 * 0) = 0$

$\big((0*1)*(0*0)\big)*(0*1)=0$
$\big((0*1)*(0*1)\big)*(1*1)=0$
$\big((0*1)*(0*2)\big)*(2*1)=0$
$\big((0*2)*(0*0)\big)*(0*0)=0$
$\big((0*2)*(0*1)\big)*(1*0)=0$
$\big((0*2)*(0*2)\big)*(2*0)=0$

$\big((1*1)*(1*0)\big)*(0*1)=0$
$\big((1*1)*(1*1)\big)*(1*1)=0$
$\big((1*1)*(1*2)\big)*(2*1)=0$
$\big((1*2)*(1*0)\big)*(0*2)=0$
$\big((1*2)*(1*1)\big)*(1*2)=0$
$\big((1*2)*(1*2)\big)*(2*2)=0$

Untuk $x=2$, maka diperoleh
$\big((2*0)*(2*0)\big)*(0*0)=0$
$\big((2*0)*(2*1)\big)*(1*0)=0$
$\big((2*0)*(2*2)\big)*(2*0)=0$
$\big((2*1)*(2*0)\big)*(0*1)=0$

$\big((2*1)*(2*1)\big)*(1*1)=0$
$\big((2*1)*(2*2)\big)*(2*1)=0$
$\big((2*2)*(2*0)\big)*(0*2)=0$
$\big((2*2)*(2*1)\big)*(1*2)=0$
$\big((2*2)*(2*2)\big)*(2*2)=0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x,y,z \in M_3$, berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$.

ii. Akan ditunjukkan $\forall x,y \in M_3$, berlaku $(x*(x*y))*y=0$.

Untuk $x=0, y=0$ maka diperoleh $(0*(0*0))*0=0$

Untuk $x=0, y=1$ maka diperoleh $(0*(0*1))*1=0$

Untuk $x=0, y=2$ maka diperoleh $(0*(0*2))*2=0$

Untuk $x=1, y=0$ maka diperoleh $(1*(1*0))*0=0$

Untuk $x=1, y=1$ maka diperoleh $(1*(1*1))*1=0$

Untuk $x=1, y=2$ maka diperoleh $(1*(1*2))*2=0$

Untuk $x=2, y=0$ maka diperoleh $(2*(2*0))*0=0$

Untuk $x=2, y=1$ maka diperoleh $(2*(2*1))*1=0$

Untuk $x=2, y=2$ maka diperoleh $(2*(2*2))*2=0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x,y \in M_3$, berlaku $(x*(x*y))*y=0$

iii. Dari tabel 2.1(b), jelas bahwa $\forall x \in M_3$, berlaku $x*x=0$.

iv. Dari tabel2.1(b), jelas bahwa $\forall x \in M_3$, jika $x*x=0$, maka $x=x$

Terbukti bahwa $(M_3, *, 0)$ adalah Aljabar BCI.

Definisi 2.9.5

Misalkan $(M_n,* ,0)$ adalah aljabar BCI, maka M_n disebut *P-semisimple* jika $0 * (0 * x) = x$ untuk setiap $x \in X$ (Saeid, 2010: 550).

Contoh 2.9.6

Didefinisikan $(M_2,\ *,\ 0)$ adalah Aljabar BCI. Selidiki apakah M_2 adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple?*

Jawab:

Akan dibuktikan $0 * (0 * x) = x, \forall\ x \in M_2$

Dari penelitian sebelumnya, untuk $(M_2,\ *,\ 0)$ diberikan bentuk table Cayley sebagai berikut:

$\rightarrow$

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabel 2.2 Uji tabel Cayley modulo 2 terhadap aksioma *P-semisimple*

Ambil sebarang $x \in M_2$

Pilih $x = 0 \rightarrow 0 * (0 * 0) = 0$ $0 * 0 = 0$ $0 = 0$	Pilih $x = 1 \rightarrow 0 * (0 * 1) = 1$ $0 * 1 = 1$ $1 = 1$

Karena $\forall x \in M_2$ aksioma *P-semisimple* terpenuhi, maka terbukti bahwa M_2 adalah Aljabar BCI *P-semisimple*.

Definisi 2.9.7

Diberikan $(M_n,*, 0)$ adalah aljabar BCI. Maka $(M_n,*, 0)$ memenuhi sifat-sifat berikut:

i. $0 * x = x, \rightarrow x = 0$

ii. $(x * y) * z = (x * z) * y$

iii. $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$. $\forall x, y, z \in M_n$ (Liu, 2000: 441)

Contoh 2.9.8

Diberikan $(M_3,*,0)$ adalah Aljabar BCI. Akan ditunjukkan $(M_3,*,0)$ memenuhi sifat Aljabar BCI.

i. Akan ditunjukkan $0 * x = x, \forall x \in M_3$

Untuk $x = 0$	Untuk $x = 1$	Untuk $x = 2$
$0 * 0 = 0 = x$	$0 * 1 = 2 \neq x$	$0 * 2 = 1 \neq x$

Terbukti $\forall x \in M_3,\ 0 * x = x, \rightarrow x = 0$

ii. Akan ditunjukkan $(x * y) * z = (x * z) * y, \forall x, y, z \in M_3$

$(0 * 0) * 0 = (0 * 0) * 0$ $0 * 0 = 0 * 0$ $0 = 0$	$(1 * 1) * 2 = (1 * 2) * 1$ $0 * 2 = 2 * 1$ $1 = 1$
$(0 * 0) * 1 = (0 * 1) * 0$ $0 * 1 = 2 * 0$ $2 = 2$	$(1 * 2) * 0 = (1 * 0) * 2$ $2 * 0 = 1 * 2$ $2 = 2$
$(0 * 0) * 2 = (0 * 2) * 0$ $0 * 2 = 1 * 0$ $1 = 1$	$(1 * 2) * 1 = (1 * 1) * 2$ $2 * 1 = 0 * 2$ $1 = 1$
$(0 * 1) * 0 = (0 * 0) * 1$ $2 * 0 = 0 * 1$ $2 = 2$	$(1 * 2) * 2 = (1 * 2) * 2$ $2 * 2 = 2 * 2$ $0 = 0$
$(0 * 1) * 1 = (0 * 1) * 1$ $2 * 1 = 2 * 1$ $1 = 1$	$(2 * 0) * 0 = (2 * 0) * 0$ $2 * 0 = 2 * 0$ $2 = 2$
$(0 * 1) * 2 = (0 * 2) * 1$ $2 * 2 = 1 * 1$ $0 = 0$	$(2 * 0) * 1 = (2 * 1) * 0$ $2 * 1 = 1 * 0$ $1 = 1$
$(0 * 2) * 0 = (0 * 0) * 2$ $1 * 0 = 0 * 2$ $1 = 1$	$(2 * 0) * 2 = (2 * 2) * 0$ $2 * 2 = 0 * 0$ $0 = 0$
$(0 * 2) * 1 = (0 * 1) * 2$ $1 * 1 = 2 * 2$ $0 = 0$	$(2 * 1) * 0 = (2 * 0) * 1$ $1 * 0 = 2 * 1$ $1 = 1$
$(0 * 2) * 2 = (0 * 2) * 2$ $1 * 2 = 1 * 2$ $2 = 2$	$(2 * 1) * 1 = (2 * 1) * 1$ $1 * 1 = 1 * 1$ $0 = 0$

$$\begin{aligned}
(1*0)*0 &= (1*0)*0 \\
1*0 &= 1*0 \\
1 &= 1 \\
(1*0)*1 &= (1*1)*0 \\
1*1 &= 0*0 \\
0 &= 0 \\
(1*0)*2 &= (1*2)*0 \\
1*2 &= 2*0 \\
2 &= 2 \\
(1*1)*0 &= (1*0)*1 \\
0*0 &= 1*1 \\
0 &= 0 \\
(1*1)*1 &= (1*1)*1 \\
0*1 &= 0*1 \\
2 &= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2*1)*2 &= (2*2)*1 \\
1*2 &= 0*1 \\
2 &= 2 \\
(2*2)*0 &= (2*0)*2 \\
0*0 &= 2*2 \\
0 &= 0 \\
(2*2)*1 &= (2*1)*2 \\
0*1 &= 1*2 \\
2 &= 2 \\
(2*2)*2 &= (2*2)*2 \\
0*2 &= 0*2 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Terbukti $\forall x, y, z \in M_3$ berlaku $(x*y)*z = (x*z)*y$

iii. Akan ditunjukkan $0*(x*y) = (0*x)*(0*y), \forall x, y \in M_3$

$$\begin{aligned}
0*(0*0) &= (0*0)*(0*0) \\
0*0 &= 0*0 \\
0 &= 0 \\
0*(0*1) &= (0*0)*(0*1) \\
0*2 &= 0*2 \\
1 &= 1 \\
0*(0*2) &= (0*0)*(0*2) \\
0*1 &= 0*1 \\
2 &= 2 \\
0*(1*0) &= (0*1)*(0*0) \\
0*1 &= 2*0 \\
2 &= 2 \\
0*(1*1) &= (0*1)*(0*1) \\
0*0 &= 2*2 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0*(1*2) &= (0*1)*(0*2) \\
0*2 &= 2*1 \\
1 &= 1 \\
0*(2*0) &= (0*2)*(0*0) \\
0*2 &= 1*0 \\
1 &= 1 \\
0*(2*1) &= (0*2)*(0*1) \\
0*1 &= 1*2 \\
2 &= 2 \\
0*(2*2) &= (0*2)*(0*2) \\
0*0 &= 1*1 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Terbukti $\forall x, y \in M_3$ berlaku $0*(x*y) = (0*x)*(0*y)$

2.10 Ideal-ideal pada Aljabar BCI

2.10.1 *q*-ideal

Didefinisikan $(M_n, *, 0)$ adalah Aljabar BCI *P-semisimple* dan I adalah ideal pada M_n. I dikatakan *q*-ideal pada M_n jika memenuhi:

1) $0 \in I$

2) $x * (y * z) \in I$ dan $y \in I$ akibatnya $x * z \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_n$ (Saeid, 2010: 550).

2.10.2 *a*-ideal

Didefinisikan $(M_n,*,0)$ adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple*. Suatu subset I yang tak kosong dari $(M_n,*,0)$ dikatakan *a*-ideal pada M_n jika memenuhi:

1) $0 \in I$
2) $(x * z) * (0 * y) \in I$ dan $z \in I$ akibatnya $y * x \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_n$ (Saeid, 2010: 550).

2.10.3 *p*-ideal

Didefinisikan $(M_n,*,0)$ adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple*. suatu subset I yang tak kosong dari $(M_n,*,0)$ dikatakan *p*-ideal pada M_n jika memenuhi:

1) $0 \in I$
2) $(x * z) * (y * z) \in I$ dan $y \in I$ akibatnya $x \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_n$ (Saeid, 2010: 550-551).

2.10.4 *fantastic*-ideal

Didefinisikan $(M_n,*,0)$ adalah Aljabar BCI *P-semisimple* dan I adalah ideal pada M_n. Maka I dikatakan *fantastic*-ideal pada M_n jika$(x * y) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $x * \big(y * (y * x)\big) \in I;\ \forall x,\ y,\ z \in M_n$

2.10.5 *Strong*-ideal

Definisi 2.10.5.1

Didefinisikan $(M_n,*,0)$ adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple* dan I adalah ideal pada M_n. Misal ada $a \in I$ dan $x \in M_n \backslash I$. Jika $a * x \in M_n \backslash I, \forall x \in M_n \backslash I$, maka I disebut *Strong ideal* pada M_n.

Contoh 2.10.5.2

Diberikan $(M_4, *, 0)$ adalah aljabar BCI yang *P-semisimple* dengan $I = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah ideal pada M_4. Tunjukkan bahwa I adalah *Strong ideal* pada M_4.

Jawab:

Ambil $a_1 = 0 \in I$

$a_2 = 1 \in I$

$a_3 = 2 \in I$

$a_4 = 3 \in I$

Diketahui $M_4 = 0, 1, 2, 3$ dan $I = \{0, 1, 2, 3\}$, maka $M_4 \backslash I = \emptyset$. Karena $M_4 \backslash I = \emptyset$ maka $x \notin M_4 \backslash I$. Sehingga I bukan *Strong ideal* pada M_4.

2.10.6 *Obstinate*-ideal

Definisi 2.10.6.1

Didefinisikan $(M_n,*,0)$ adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple* dan $I = M_n$ adalah ideal pada M_n. Jika $\forall x, y \in M_n \backslash I, x * y, y * x \in I$, maka I disebut *Obstinate ideal* pada M_n.

Contoh 2.10.6.2

Diberikan $(M_4, *, 0)$ adalah aljabar BCI yang *P-semisimple* dengan $I = M_4$. Tunjukkan bahwa I adalah *Obstinate ideal* pada M_4.

Jawab:

Diketahui $M_4 = 0{,}1{,}2{,}3$ dan $I = \{0, 1, 2, 3\}$, sehingga $M_4 \backslash I = \emptyset$.

Diperoleh $2 * 3 = 3 \; dan \; 3 * 2 = 1 \notin I$ (bukan Obstinate ideal)

2.11 Konsep Aljabar BCI dalam Islam

Dalam surat Al-Ahzab ayat 21,

لَّقَدْ كَانَ لَكُمْ فِى رَسُولِ ٱللَّهِ أُسْوَةٌ حَسَنَةٌ لِّمَن كَانَ يَرْجُوا۟ ٱللَّهَ وَٱلْيَوْمَ ٱلْـَٔاخِرَ
وَذَكَرَ ٱللَّهَ كَثِيرًا ﴿٢١﴾

Artinya: Sesungguhnya telah ada pada (diri) Rasulullah itu suri teladan yang baik bagimu (yaitu) bagi orang yang mengharap (rahmat) Allah dan (kedatangan) hari kiamat dan Dia banyak menyebut Allah.

Dari ayat di atas, dapat kita ketahui bahwa Allah memerintahkan kita untuk mengikuti dan meniru sunnah-sunnah Nabi Muhammad SAW. Baik dalam aspek pemerintahan, ibadah, sosialisasi antar mahluk, dan lain-lain. Sebagaimana ditegaskan dalam surat An-nisa’ ayat 80

مَّن يُطِعِ ٱلرَّسُولَ فَقَدْ أَطَاعَ ٱللَّهَ ۖ وَمَن تَوَلَّىٰ فَمَآ أَرْسَلْنَـٰكَ عَلَيْهِمْ حَفِيظًا ﴿٨٠﴾

Artinya: Barangsiapa yang mentaati Rasul itu, Sesungguhnya ia telah mentaati Allah. dan Barangsiapa yang berpaling (dari ketaatan itu), Maka Kami tidak mengutusmu untuk menjadi pemelihara bagi mereka.

Sebagai seorang muslim, kita hendaknya mengkaji lebih dalam kemudian diterapkan/diamalkan dalam kehidupan sehari-hari. Adapun salah satu contoh ibadah yang disunnahkan adalah mengerjakan shalat sunnah.

Salat Sunnat atau salat nawafil (jamak: nafilah) adalah salat yang dianjurkan untuk dilaksanakan namun tidak diwajibkan sehingga tidak berdosa bila ditinggalkan dengan kata lain apabila dilakukan dengan baik dan benar serta penuh ke ikhlasan akan tampak hikmah dan rahmat dari Allah taala yang begitu indah (Anonymouse, 2011).

Shalat sunnah yang dilakukan Rasulullah ada banyak, diantaranya:

1. Shalat Idul Fitri
2. Shalat Idul Adha
3. Shalat Kusuf (gerhana matahari)
4. Shalat Khusuf (gerhana bulan)
5. Shalat Istisqo’
6. Shalat Tarawih
7. Shalat Witir
8. Shalat Rawatib (Rifa’i, 2009: 32).

Pada tiap-tiap shalat di atas memiliki syarat dan ketentuan masing-masing. Misalkan saat ada gerhana matahari, Rasulullah mengerjakan shalat kusuf dan saat gerhana bulan Rasulullah mengerjakan shalat Khusuf. Jadi shalat-shalat sunnah di atas memiliki ketentuan-

ketentuan yang harus dipenuhi (tidak dikerjakan di sembarang waktu dan keadaan).

Adapun syarat-syarat mengerjakan shalat adalah sebagai berikut:

1. Beragama Islam
2. Sudah baligh dan berakal
3. Suci dari hadats
4. Suci seluruh anggota badan, pakaian dan tempat
5. Menutup aurat, laki-laki auratnya antara pusat dan lutut, sedang wanita seluruh anggota badannya kecuali muka dan dua belah tapak tangan.
6. Masuk waktu yang telah ditentukan untuk masing-masing shalat
7. Menghadap kiblat
8. Mengetahui mana yang rukun dan mana yang sunah

Rukun-rukun shalat adalah:

1. Niat
2. Takbiratul ihram
3. Berdiri tegak bagi yang berkuasa ketika shalat fardu. Boleh sambil duduk atau berbaring bagi yang sakit
4. Membaca surat Al-Fatihah pada tiap-tiap raka'at
5. Rukuk dengan tumakninah
6. I'tidal dengan tumakninah
7. Sujud dua kali dengan tumakninah
8. Duduk antara dua sujud dengan tumakninah
9. Duduk tasyahud akhir dengan tumakninah

10. Membaca tasyahud akhir

11. Membaca shalawat nabi pada tasyahud akhir

12. Membaca salam yang pertama

13. Tertib: berurutan mengerjakan rukun-rukun tersebut

(Rifa'i, 2009: 32).

Selanjutnya sebagaimana telah ditegaskan dalam surat An-nisa' ayat 80 di atas, Perintah Shalat ini hendaklah ditanamkan ke dalam hati dan jiwa anak-anak. Dimulai dari mengerjakan hal-hal wajib terlebih dahulu yang kemudian diikuti dengan menjalankan perkara-perkara sunnah. Pendidikan yang cermat hendaknya dilakukan sejak kecil, sebagaimana tersebut dalam hadits Nabi Muhammad SAW sebagai berikut:

مُرُوااَوْلادَكُمْ بِالصَّلاةِوَهُمْ اَبْنَاءُ سَبْعِ سِنِيْنَ وَاضْرِبُوْهُمْ عَلَيْهَا وَهُمْ اَبْنَاءُعَشْرِسِنِيْنَ(رواه ابوداود)

Artinya: Perintahlah anak-anakmu mengerjakan shalat di waktu usia mereka meningkat tujuh tahun, dan pukullah (kalau enggan melakukan shalat) di waktu mereka meningkat usia sepuluh tahun(HR. Abu Dawud).

Dalam skripsi ini, konsep ilmu yang dipakai menyerupai dengan konsep shalat sunnah di atas. Jika dalam melaksanakan shalat sunnah seorang tersebut harus beragama Islam maka dalam konsep aljabar ini selalu berhubungan dengan suatu himpunan tak kosong, yang dalam skripsi ini dimisalkan dengan M_n. Tiap-tiap shalat sunnah yang akan dikerjakan memiliki ketentuan waktu yang berbeda, misalnya shalat hari raya idul fitri maka dilaksanakan hanya pada tanggal 1 syawal saja begitu juga dengan shalat sunnah lainnya sesuai dengan ketentuan waktunya. Dalam bidang

Aljabar, tiap sub-babnya (grup, ring, aljabar BCI, aljabar BCK) selalu memiliki aksioma atau ketentuan yang harus dimiliki. Dalam skripsi ini dibahas mengenai aljabar BCI, maka aksioma-aksioma yang harus dipenuhi adalah:

i. $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$,

ii. $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$,

iii. $x * x = 0$,

iv. $x * y = 0 = y * x \rightarrow x = y$,

untuk setiap $x, y, z \in X$ (Saeid, 2010:550).

BAB III
PEMBAHASAN

Pada hasil penelitian sebelumnya, telah dikonstruksi suatu Aljabar BCI yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*. Selanjutnya, pada skripsi ini saya ingin melanjutkan penelitian mengenai Aljabar BCI yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n* tersebut khususnya tentang ideal pada Aljabar BCI *P-semisimple*. Namun sebelumnya, akan saya selidiki terlebih dahulu bahwa $(M_n,\ *,\ 0)$ adalah Aljabar BCI *P-semisimple*.

3.1 Aljabar BCI *P-semisimple*

Definisi 3.1.1

Diberikan $(M_n,\ *,\ 0)$ adalah Aljabar BCI. M_n disebut *P-semisimple* jika $0 * (0 * x) = x$, untuk setiap $x \in M_n$ (Saeid, 2010: 550).

Contoh 3.1.2

Didefinisikan $(M_2,\ *,\ 0)$ adalah Aljabar BCI. Selidiki apakah M_2 adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple?*

Jawab:

Akan dibuktikan $0 * (0 * x) = x, \forall\ x \in M_2$

Dari penelitian sebelumnya, untuk $(M_2,\ *,\ 0)$ diberikan bentuk tabel Cayley sebagai berikut:

→

*	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabel 3.1 Uji tabel Cayley pada modulo 2 terhadap aksioma *P-semisimple*

Ambil sebarang $x \in M_2$

Pilih $x = 0 \rightarrow 0 * (0 * 0) = 0$
$0 * 0 = 0$
$0 = 0$

Pilih $x = 1 \rightarrow 0 * (0 * 1) = 1$
$0 * 1 = 1$
$1 = 1$

Karena $\forall x \in M_2$ aksioma *P-semisimple* terpenuhi, maka terbukti bahwa M_2 adalah Aljabar BCI *P-semisimple*.

Berangkat dari **contoh 3.1.2**, akan dibuktikan bahwa $(M_n, *, 0)$ adalah *P-semisimple*.

I. Untuk $x \in M_2$

Sebagaimana jawaban **contoh 3.1.2**, maka terbukti bahwa M_2 adalah *P-semisimple*.

II. Untuk $x \in M_3$, akan dibuktikan $0 * (0 * x) = x, \forall x \in M_3$

Dari penelitian sebelumnya untuk $(M_3, *, 0)$ diberikan tabel Cayley sebagai berikut:

$\rightarrow$

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Tabel 3.2 Uji tabel Cayley pada modulo 3 terhadap aksioma *P-semisimple*

Ambil sebarang $x \in M_3$

Pilih $x = 0 \rightarrow 0 * (0 * 0) = 0$
$0 * 0 = 0$
$0 = 0$

Pilih $x = 1 \rightarrow 0 * (0 * 1) = 1$
$0 * 2 = 1$
$1 = 1$

Pilih $x = 2 \rightarrow 0 * (0 * 2) = 2$
$0 * 2 = 2$
$2 = 2$

Karena $0 * (0 * x) = x, \forall x \in M_3$ terpenuhi, maka terbukti bahwa M_3 adalah Aljabar BCI *P-semisimple*.

III. Untuk $x \in M_4$, akan dibuktikan $0 * (0 * x) = x, \forall x \in M_4$

Dari penelitian sebelumnya untuk M_4 diberikan tabel Cayley sebagai berikut:

$\rightarrow$

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

Tabel 3.3 Uji tabel Cayley pada modulo 4 terhadap aksioma *P-semisimple*

Ambil sebarang $x \in M_4$

Pilih $x = 0 \rightarrow 0 * (0 * 0) = 0$
$$0 * 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Pilih $x = 1 \rightarrow 0 * (0 * 1) = 1$
$$0 * 3 = 1$$
$$1 = 1$$

Pilih $x = 2 \rightarrow 0 * (0 * 2) = 2$
$$0 * 2 = 2$$
$$2 = 2$$

Pilih $x = 3 \rightarrow 0 * (0 * 3) = 3$
$$0 * 1 = 3$$
$$3 = 3$$

Karena $0 * (0 * x) = x, \forall\, x \in M_4$ terpenuhi, maka terbukti bahwa M_4 adalah Aljabar BCI *P-semisimple*.

IV. Untuk $x \in M_5$, akan dibuktikan $0 * (0 * x) = x, \forall\, x \in M_5$

Dari penelitian sebelumnya untuk M_5 diberikan tabel Cayley sebagai berikut:

$\rightarrow$

*	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0

Tabel 3.4 Uji tabel Cayley pada modulo 5 terhadap aksioma *P-semisimple*

Ambil sebarang $x \in M_5$

Pilih $x = 0 \rightarrow 0 * (0 * 0) = 0$
$$0 * 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Pilih $x = 3 \rightarrow 0 * (0 * 3) = 3$
$$0 * 2 = 3$$
$$3 = 3$$

Pilih $x = 1 \rightarrow 0 * (0 * 1) = 1$
$0 * 4 = 1$
$1 = 1$

Pilih $x = 2 \rightarrow 0 * (0 * 2) = 2$
$0 * 3 = 2$
$2 = 2$

Pilih $x = 4 \rightarrow 0 * (0 * 4) = 4$
$0 * 1 = 4$
$4 = 4$

Karena $0 * (0 * x) = x, \forall\, x \in M_5$ terpenuhi, maka terbukti bahwa M_5 adalah Aljabar BCI *P-semisimple*.

V. Untuk $x \in M_6$, akan dibuktikan $0 * (0 * x) = x, \forall\, x \in M_6$

Dari penelitian sebelumnya untuk M_6 diberikan tabel Cayley sebagai berikut:

$\rightarrow$

*	0	1	2	3	4	5
0	0	5	4	3	2	1
1	1	0	5	4	3	2
2	2	1	0	5	4	3
3	3	2	1	0	5	4
4	4	3	2	1	0	5
5	5	4	3	2	1	0

Tabel 3.5 Uji tabel Cayley pada modulo 6 terhadap aksioma *P-semisimple*

Ambil sebarang $x \in M_6$

Pilih $x = 0 \rightarrow 0 * (0 * 0) = 0$
$0 * 0 = 0$
$0 = 0$

Pilih $x = 1 \rightarrow 0 * (0 * 1) = 1$
$0 * 5 = 1$
$1 = 1$

Pilih $x = 2 \rightarrow 0 * (0 * 2) = 2$
$0 * 4 = 2$
$2 = 2$

Pilih $x = 3 \rightarrow 0 * (0 * 3) = 3$
$0 * 3 = 3$
$3 = 3$

Pilih $x = 4 \rightarrow 0 * (0 * 4) = 4$
$0 * 2 = 4$
$4 = 4$

Pilih $x = 5 \rightarrow 0 * (0 * 5) = 5$
$0 * 1 = 5$
$5 = 5$

Karena $0 * (0 * x) = x, \forall\, x \in M_6$ terpenuhi, maka terbukti bahwa M_6 adalah *P-semisimple*

Dari beberapa contoh-contoh di atas, akan dibuat generalisasi dari modulo *n* sebagai berikut:

Teorema 3.1.3

Diberikan $(M_n,\ *,\ 0)$ adalah Aljabar BCI, maka $(M_n,\ *,\ 0)$ adalah *P-semisimple*.

Bukti:

Ambil sebarang $x \in M_n$

Akan ditunjukkan $0 * (0 * x) = 0, \forall x \in M_n$.

$0 * (0 * x) = 0$ (aksioma *P-semisimple*). Sesuai definisi 2.9.7 (i) diperoleh $0 * 0 = 0$ maka terbukti $0 * (0 * x) = 0, \forall x \in M_n$

3.2 Menentukan Ideal pada Aljabar BCI *P-semisimple*

Setelah diketahui $(M_n,\ *,\ 0)$ adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple*, selanjutnya dapat diselidiki idealnya dengan menggunakan definisi ideal pada Aljabar BCI sebagai berikut:

Definisi 3.2.1

Misalkan $(M_n,\ *,\ 0)$ adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple* dan terdapat subset tak kosong I dari $(M_n,\ *,\ 0)$. I dikatakan *ideal* pada M_n jika $\forall x, y \in M_n$ berlaku

i) $0 \in I$

ii) $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$. Dengan syarat $y \in I, x \leq y \rightarrow x \in I$ (Saeid, 2010: 550).

Contoh 3.2.2

Diberikan $(M_3,\ *,\ 0)$ adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple* dengan $I \subseteq M_3$. Tunjukkan I ideal pada M_3.

Jawab

Diketahui $M_3 = \{0, 1, 2\}$

Akan ditunjukkan untuk sebarang $I \subseteq M_3$ memenuhi aksioma ideal.

Dari penelitian sebelumnya diketahui $(M_3,\ *,\ 0)$ sebagai berikut:

$\rightarrow$

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Tabel 3.6 Uji tabel Cayley pada modulo3 terhadap aksioma Ideal

Adapun kemungkinan-kemungkinan I yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1) Misalkan $I = \{0\}$. Karena anggota I adalah 0, maka jelaslah bahwa $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_3$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 2 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 1 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 2 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$

Aksioma terpenuhi, akibatnya I Terbukti ideal

2) Misalkan $I = \{0,1\}$. Karena anggota I adalah 1 dan 0, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_3$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 2 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 1 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 2 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$

Aksioma terpenuhi, akibatnya I Terbukti ideal

3) Misalkan $I = \{0,2\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 2, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_3$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 2 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 1 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$ (tidak memenuhi aksioma)
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$

Aksioma tidak terpenuhi, akibatnya I Terbukti bukan ideal

4) Misalkan $I = \{0,1,2\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 2, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_3$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 2 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 1 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$

Aksioma terpenuhi, akibatnya I Terbukti ideal

5) Misalkan $I = \{1,2\}$. Karena anggota I adalah 1 dan 2, maka terbukti $0 \notin I$ dan karenanya tidak perlu dibuktikan aksioma ii) karena jelas bukan ideal. Hal ini juga membuktikan bahwa untuk I yang tidak memuat 0 maka jelas bukan ideal.

Contoh 3.2.2 di atas bagi penulis menarik untuk diselidiki karena ternyata untuk Aljabar BCI yang terbangun dari karakterisasi grup modulo tidak semua $I \subseteq M_n$ adalah ideal. Ada sebagian subset yang ideal dan ada juga yang tidak ideal. Dari fakta ini, penulis ingin mengetahui lebih lanjut mengenai subset-subset tersebut dengan mencari semua subset yang mungkin terbentuk dari M_n dan kemudian mengujinya dengan menggunakan definisi ideal. Namun, dalam skripsi ini penulis hanya mengambil contoh $M_n, \forall n = 2, 3, 4, 5, 6$ sebagai objek analisa untuk mendapatkan sifat umumnya.

Berdasarkan hasil analisa pada lampiran 1, dapat diketahui bahwa:

$M_2 = \{0,1\}$, dengan subset yang mungkin terbentuk adalah $\{0\}$ $\{1\}$ dan $\{0,1\}$.

Untuk subset $\{0\}$ dan $\{0,1\}$, keduanya merupakan ideal pada M_2. Namun, untuk subset $\{1\}$ bukan merupakan ideal pada M_2 sebab $\{1\}$ tidak memuat 0. Sehingga pada mengujian selanjutnya, penulis hanya menguji subset-subset yang mempunyai elemen 0 saja. Sebab, untuk subset yang tidak memiliki elemen 0, jelaslah bukan ideal.

$M_3 = \{0,1,2\}$, dengan subset yang mungkin terbentuk adalah $\{0\}, \{1\}, \{2\}$, $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$ dan $\{0, 1, 2\}$.

Untuk subset $\{0\}$, $\{0, 1\}$ dan $\{0, 1, 2\}$ adalah ideal pada M_3. Namun untuk $\{1\}, \{2\}, \{0, 2\}$ dan $\{1, 2\}$ bukan merupakan ideal pada M_3. Dengan alasan $\{1\}, \{2\}$ dan $\{1, 2\}$ tidak mempunyai elemen 0 dan $\{0,2\}$ bukan ideal karena ada $x \in M_3$ yang tidak memenuhi aksioma ideal.

$M_4 = \{0,1,2,3\}$, dengan subset yang mungkin terbentuk adalah $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}$.

Untuk subset $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{0,1,2\}$ dan $\{0,1,2,3\}$ adalah ideal pada M_4. Namun untuk $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,3\}$ dan $\{0,2,3\}$ bukan merupakan ideal pada M_4. Dengan alasan $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ dan $\{1,2,3\}$ tidak mempunyai elemen 0, sedangkan untuk $\{0,1,3\}$ dan $\{0,2,3\}$ bukan ideal karena ada $x \in M_4$ yang tidak memenuhi aksioma ideal.

$M_5 = \{0,1,2,3,4\}$, dengan subset yang mungkin terbentuk adalah $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{0,4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,4\}, \{0,2,3\}, \{0,2,4\}, \{0,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,4\}, \{0,1,3,4\}, \{0,2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$, $\{0,1,2,3,4\}$.

Untuk subset $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,1,3\}$, $\{0,1,2,3\}$ dan $\{0,1,2,3,4\}$ adalah ideal pada M_5. Namun untuk $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{0,3\}, \{0,4\}, \{0,1,4\}, \{0,2,3\}, \{0,2,4\}, \{0,3,4\}, \{0,1,2,4\}, \{0,1,3,4\}$ dan $\{0,2,3,4\}$ bukan merupakan ideal pada M_5. Dengan alasan $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}$,

$\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\ \{2,3,4\},\{1,3,4\}$ dan $\{1,2,3,4\}$ tidak mempunyai elemen 0, sedangkan untuk $\{0,2,3\},\{0,2,4\}$, $\{0,3,4\},\ \{0,1,2,4\},\{0,1,3,4\}$ dan $\{0,2,3,4\}$ bukan ideal karena ada $x \in M_5$ yang tidak memenuhi aksioma ideal.

$M_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$, dengan subset yang mungkin terbentuk adalah $\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,4\},\{0,5\},\{1,2\},\{1,3\}$, $\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{0,1,2\},\{0,1,3\}$, $\{0,1,4\},\{0,1,5\},\{0,2,3\},\{0,2,4\},\{0,2,5\},\{0,3,4\},\{0,3,5\},\{0,4,5\}$, $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\},\{3,4,5\},\{0,1,2,3\},\{0,1,2,4\},\{0,1,2,5\},\{0,1,3,4\},\{0,1,3,5\}$, $\{0,1,4,5\},\{0,2,3,4\},\{0,2,3,5\},\{0,2,4,5\},\{0,3,4,5\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{0,1,2,3,4\},\{0,1,2,3,5\},\{0,1,2,4,5\}$, $\{0,1,3,4,5\},\{0,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\},\{0,1,2,3,4,5\}$.

Untuk subset $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,1,3\}$, $\{0,2,3\}$, $\{0,2,4\}$, $\{0,1,2,3\}$, $\{0,1,2,4\}$, $\{0,1,2,3,4\}$ dan $\{0,1,2,3,4,5\}$ adalah ideal pada M_6. Namun untuk $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}$, $\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\},\{0,4\},\{0,5\},\{0,1,4\},\{0,1,5\}$, $\{0,2,5\},\{0,3,4\},\{0,3,5\},\{0,4,5\},\{0,1,2,5\},\{0,1,3,4\},\{0,1,3,5\}$, $\{0,1,4,5\},\{0,2,3,4\},\{0,2,3,5\},\{0,2,4,5\},\{0,3,4,5\},\{0,1,2,3,5\}$,

$\{0,1,2,4,5\}, \{0,1,3,4,5\}$ dan $\{0,2,3,4,5\}$ bukan merupakan ideal pada M_6 dengan alasan $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}$, $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2,5\}, \{3, 4\}, \{3,5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4,5\}, \{3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}$ dan $\{1,2,3,4,5\}$ tidak mempunyai elemen 0, sedangkan untuk $\{0,4\}, \{0, 5\}, \{0,1,4\}$, $\{0,1,5\}, \{0, 2, 5\}, \{0,3,4\}, \{0, 3, 5\}, \{0,4,5\}, \{0, 1, 2, 5\}, \{0,1,3,4\}$, $\{0,1,3,5\}, \{0,1,4,5\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{0,2,3,5\}, \{0,2,4,5\}, \{0,3,4,5\}, \{0,1,2,3,5\}$, $\{0,1,2,4,5\}, \{0,1,3,4,5\}$ dan $\{0,2,3,4,5\}$ bukan ideal karena ada $x \in M_6$ yang tidak memenuhi aksioma ideal.

Dari uraian mengenai analisa ideal di atas, terlihat bahwa untuk subset $I = \{0\}$, $I = \{0,1\}$ dan $I = M_n$; $\forall n = 2, 3, 4, 5, 6$ adalah selalu ideal. Namun, pada definisi ideal dikatakan $I \subseteq M_n$ jadi terdapat dua kemungkinan yaitu $I \subset M_n$ dan $I = M_n$. Untuk $I \subset M_n$, walaupun untuk $I = \{0\}$ dan $I = \{0,1\}$ terpenuhi namun tidak berlaku untuk setiap $I \subset M_n$ sehingga tidak berlaku umum. Sedangkan untuk $I = M_n$ terpenuhi untuk setiap $M_n; n = 2, 3, 4, 5, 6$. Sehingga ketentuan tersebut dapat dituangkan dalam teorema berikut:

Teorema 3.2.3

Diberikan $(M_n, *, 0)$ adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple* dan $I \subseteq M_n$. I dikatakan ideal dari M_n; $\forall n = 2, 3, 4, 5, 6, ...$ jika dan hanya jika $I = M_n$.

Bukti:

Untuk membuktikan tidak sebarang $I \subset M_n$ memenuhi aksioma ideal adalah dengan mengambil salah satu subset I dari grup modulo *n* yang tidak memenuhi aksioma ideal, sehingga kanselasi terpenuhi.

Misalkan $M_3 = \{0, 1, 2\}$ dengan $I = \{0, 2\}$.

Ambil sebarang $1, 2 \in M_3$; $\exists 1 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$. terbukti bahwa tidak sebarang $I \subset M_n$ memenuhi aksioma ideal. Akibatnya berlaku ideal jika dan hanya jika $I = M_n$.

3.3 Macam-macam ideal pada Aljabar *P-semisimple*

3.3.1 *q*-ideal

Definisi 3.3.1.1

Didefinisikan $(M_n,\ *,\ 0)$ adalah Aljabar BCI *P-semisimple* dan I adalah ideal pada M_n. I dikatakan *q*-ideal pada M_n jika memenuhi:

1) $0 \in I$
2) $x * (y * z) \in I$ dan $y \in I$ akibatnya $x * z \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_n$ (Saeid, 2010: 550).

Contoh 3.3.1.2

Diberikan $(M_4,\ *,\ 0)$ adalah aljabar BCI yang *P-semisimple* dan $I = M_4$. Selidiki apakah I memenuhi aksioma *q*-ideal?

Adib: I memenuhi aksioma 1) dan 2) pada *q*-Aljabar.

Jawab: Ambil $I = \{0, 1, 2, 3\}$

1) Akan ditunjukkan $0 \in I$.

   Karena $I = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ maka jelaslah $0 \in I$

2) Akan ditunjukkan $x * (y * z) \in I$ dan $y \in I$ akibatnya $x * z \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_4$

$0 * (0 * 0) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $0 * 0 = 0 \in I$
$0 * (0 * 1) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $0 * 1 = 3 \in I$
$0 * (0 * 2) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $0 * 2 = 2 \in I$
$0 * (0 * 3) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $0 * 3 = 1 \in I$
$1 * (0 * 0) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $1 * 0 = 1 \in I$
$1 * (0 * 1) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $1 * 1 = 0 \in I$
$1 * (0 * 2) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $1 * 2 = 3 \in I$
$1 * (0 * 3) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $1 * 3 = 2 \in I$
$2 * (0 * 0) = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $2 * 0 = 2 \in I$
$2 * (0 * 1) = 2 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $2 * 1 = 1 \in I$
$2 * (0 * 2) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $2 * 2 = 0 \in I$
$2 * (0 * 3) = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $2 * 3 = 3 \in I$
$3 * (0 * 0) = 3 * 0 = 3 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $3 * 0 = 3 \in I$
$3 * (0 * 1) = 3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $3 * 1 = 2 \in I$
$3 * (0 * 2) = 3 * 2 = 1 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $3 * 2 = 1 \in I$
$3 * (0 * 3) = 3 * 1 = 2 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $3 * 3 = 0 \in I$
$0 * (1 * 0) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $0 * 0 = 0 \in I$
$0 * (1 * 1) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $0 * 1 = 3 \in I$
$0 * (1 * 2) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $0 * 2 = 2 \in I$
$0 * (1 * 3) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $0 * 3 = 1 \in I$
$1 * (1 * 0) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $1 * 0 = 1 \in I$
$1 * (1 * 1) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $1 * 1 = 0 \in I$
$1 * (1 * 2) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $1 * 2 = 3 \in I$
$1 * (1 * 3) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $1 * 3 = 2 \in I$
$2 * (1 * 0) = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $2 * 0 = 2 \in I$
$2 * (1 * 1) = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $2 * 1 = 1 \in I$
$2 * (1 * 2) = 2 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $2 * 2 = 0 \in I$
$2 * (1 * 3) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $2 * 3 = 3 \in I$
$3 * (1 * 0) = 3 * 1 = 2 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $3 * 0 = 3 \in I$
$3 * (1 * 1) = 3 * 0 = 3 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $3 * 1 = 2 \in I$
$3 * (1 * 2) = 3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $3 * 2 = 1 \in I$
$3 * (1 * 3) = 3 * 2 = 1 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $3 * 3 = 0 \in I$
$0 * (2 * 0) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $0 * 0 = 0 \in I$
$0 * (2 * 1) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $0 * 1 = 3 \in I$
$0 * (2 * 2) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $0 * 2 = 2 \in I$
$0 * (2 * 3) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $0 * 3 = 1 \in I$
$1 * (2 * 0) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $1 * 0 = 1 \in I$
$1 * (2 * 1) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $1 * 1 = 0 \in I$
$1 * (2 * 2) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $1 * 2 = 3 \in I$
$1 * (2 * 3) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $1 * 3 = 2 \in I$
$2 * (2 * 0) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $2 * 0 = 2 \in I$

$$2*(2*1)=2*1=1\in I \text{ dan } y=2\in I \text{ akibatnya } 2*1=1\in I$$
$$2*(2*2)=2*0=2\in I \text{ dan } y=2\in I \text{ akibatnya } 2*2=0\in I$$
$$2*(2*3)=2*3=3\in I \text{ dan } y=2\in I \text{ akibatnya } 2*3=3\in I$$
$$3*(2*0)=3*2=1\in I \text{ dan } y=2\in I \text{ akibatnya } 3*0=3\in I$$
$$3*(2*1)=3*1=2\in I \text{ dan } y=2\in I \text{ akibatnya } 3*1=2\in I$$
$$3*(2*2)=3*0=3\in I \text{ dan } y=2\in I \text{ akibatnya } 3*2=1\in I$$
$$3*(2*3)=3*3=0\in I \text{ dan } y=2\in I \text{ akibatnya } 3*3=0\in I$$
$$0*(3*0)=0*3=1\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 0*0=0\in I$$
$$0*(3*1)=0*2=2\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 0*1=3\in I$$
$$0*(3*2)=0*1=3\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 0*2=2\in I$$
$$0*(3*3)=0*0=0\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 0*3=1\in I$$
$$1*(3*0)=1*3=2\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 1*0=1\in I$$
$$1*(3*1)=1*2=3\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 1*1=0\in I$$
$$1*(3*2)=1*1=0\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 1*2=3\in I$$
$$1*(3*3)=1*0=1\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 1*3=2\in I$$
$$2*(3*0)=2*3=3\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 2*0=2\in I$$
$$2*(3*1)=2*2=0\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 2*1=1\in I$$
$$2*(3*2)=2*1=1\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 2*2=0\in I$$
$$2*(3*3)=2*0=2\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 2*3=3\in I$$
$$3*(3*0)=3*3=0\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 3*0=3\in I$$
$$3*(3*1)=3*2=1\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 3*1=2\in I$$
$$3*(3*2)=3*1=2\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 3*2=1\in I$$
$$3*(3*3)=3*0=3\in I \text{ dan } y=3\in I \text{ akibatnya } 3*3=0\in I$$

Untuk setiap $x, y, z \in M_4\ dan\ I = \{0, 1, 2, 3\}$, aksioma 1) dan 2) terpenuhi, akibatnya $I = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah q-ideal dari M_4. Penulis telah menguji lebih lanjut tentang subset $I = M_n$; $\forall n = 2, 3, 4, 5, 6$ dan dari hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa $\forall\ I = M_n$; $n = 2, 3, 4, 5, 6$ aksioma q-ideal terpenuhi. Hal ini dikarenakan sifat tertutup dari operasi $*$.

3.3.2 *a*-ideal

Definisi 3.3.2.1

Didefinisikan $(M_n, *, 0)$ adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple*. Suatu subset *I* yang tak kosong dari $(M_n, *, 0)$ dikatakan *a*-ideal pada M_n jika memenuhi:

1) $0 \in I$

2) $(x * z) * (0 * y) \in I$ dan $z \in I$ akibatnya $y * x \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_n$ (Saeid, 2010: 550).

Contoh 3.3.2.2

Dari **contoh 3.3.1.2,** selidiki apakah memenuhi aksioma a-ideal?

Jawab: Ambil $I = \{0,1,2,3)$

1) Akan ditunjukkan $0 \in I$

   Karena $I = \{0,1,2,3)$, maka jelaslah bahwa $0 \in I$

2) Akan ditunjukkan $(x * z) * (0 * y) \in I$ dan $z \in I$ akibatnya $y * x \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_4$

$(0 * 0) * (0 * 0) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $0 * 0 = 0 \in I$
$(0 * 0) * (0 * 1) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $1 * 0 = 1 \in I$
$(0 * 0) * (0 * 2) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $2 * 0 = 2 \in I$
$(0 * 0) * (0 * 3) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $3 * 0 = 3 \in I$
$(1 * 0) * (0 * 0) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $0 * 1 = 3 \in I$
$(1 * 0) * (0 * 1) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $1 * 1 = 0 \in I$
$(1 * 0) * (0 * 2) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $2 * 1 = 1 \in I$
$(1 * 0) * (0 * 3) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $3 * 1 = 2 \in I$
$(2 * 0) * (0 * 0) = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $0 * 2 = 2 \in I$
$(2 * 0) * (0 * 1) = 2 * 3 = 3 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $1 * 2 = 3 \in I$
$(2 * 0) * (0 * 2) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $2 * 2 = 0 \in I$
$(2 * 0) * (0 * 3) = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $3 * 2 = 1 \in I$
$(3 * 0) * (0 * 0) = 3 * 0 = 3 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $0 * 3 = 1 \in I$
$(3 * 0) * (0 * 1) = 3 * 3 = 0 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $1 * 3 = 2 \in I$
$(3 * 0) * (0 * 2) = 3 * 2 = 1 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $2 * 3 = 3 \in I$
$(3 * 0) * (0 * 3) = 3 * 1 = 2 \in I$ dan $z = 0 \in I$ akibatnya $3 * 3 = 0 \in I$
$(0 * 1) * (0 * 0) = 3 * 0 = 3 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $0 * 0 = 0 \in I$
$(0 * 1) * (0 * 1) = 3 * 3 = 0 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $1 * 0 = 1 \in I$
$(0 * 1) * (0 * 2) = 3 * 2 = 1 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $2 * 0 = 2 \in I$
$(0 * 1) * (0 * 3) = 3 * 1 = 2 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $3 * 0 = 3 \in I$
$(1 * 1) * (0 * 0) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $0 * 1 = 3 \in I$
$(1 * 1) * (0 * 1) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $1 * 1 = 0 \in I$
$(1 * 1) * (0 * 2) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $2 * 1 = 1 \in I$
$(1 * 1) * (0 * 3) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $3 * 1 = 2 \in I$
$(2 * 1) * (0 * 0) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $0 * 2 = 2 \in I$

$(2 * 1) * (0 * 1) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $1 * 2 = 3 \in I$
$(2 * 1) * (0 * 2) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $2 * 2 = 0 \in I$
$(2 * 1) * (0 * 3) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $3 * 2 = 1 \in I$
$(3 * 1) * (0 * 0) = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $0 * 3 = 1 \in I$
$(3 * 1) * (0 * 1) = 2 * 3 = 3 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $1 * 3 = 2 \in I$
$(3 * 1) * (0 * 2) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $2 * 3 = 3 \in I$
$(3 * 1) * (0 * 3) = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $z = 1 \in I$ akibatnya $3 * 3 = 0 \in I$
$(0 * 2) * (0 * 0) = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $0 * 0 = 0 \in I$
$(0 * 2) * (0 * 1) = 2 * 3 = 3 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $1 * 0 = 1 \in I$
$(0 * 2) * (0 * 2) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $2 * 0 = 2 \in I$
$(0 * 2) * (0 * 3) = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $3 * 0 = 3 \in I$
$(1 * 2) * (0 * 0) = 3 * 0 = 3 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $0 * 1 = 3 \in I$
$(1 * 2) * (0 * 1) = 3 * 3 = 0 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $1 * 1 = 0 \in I$
$(1 * 2) * (0 * 2) = 3 * 2 = 1 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $2 * 1 = 1 \in I$
$(1 * 2) * (0 * 3) = 3 * 1 = 2 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $3 * 1 = 2 \in I$
$(2 * 2) * (0 * 0) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $0 * 2 = 2 \in I$
$(2 * 2) * (0 * 1) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $1 * 2 = 3 \in I$
$(2 * 2) * (0 * 2) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $2 * 2 = 0 \in I$
$(2 * 2) * (0 * 3) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $3 * 2 = 1 \in I$
$(3 * 2) * (0 * 0) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $0 * 3 = 1 \in I$
$(3 * 2) * (0 * 1) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $1 * 3 = 2 \in I$
$(3 * 2) * (0 * 2) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $2 * 3 = 3 \in I$
$(3 * 2) * (0 * 3) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $z = 2 \in I$ akibatnya $3 * 3 = 0 \in I$
$(0 * 3) * (0 * 0) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $0 * 0 = 0 \in I$
$(0 * 3) * (0 * 1) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $1 * 0 = 1 \in I$
$(0 * 3) * (0 * 2) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $2 * 0 = 2 \in I$
$(0 * 3) * (0 * 3) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $3 * 0 = 3 \in I$
$(1 * 3) * (0 * 0) = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $0 * 1 = 3 \in I$
$(1 * 3) * (0 * 1) = 2 * 3 = 3 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $1 * 1 = 0 \in I$
$(1 * 3) * (0 * 2) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $2 * 1 = 1 \in I$
$(1 * 3) * (0 * 3) = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $3 * 1 = 2 \in I$
$(2 * 3) * (0 * 0) = 3 * 0 = 3 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $0 * 2 = 2 \in I$
$(2 * 3) * (0 * 1) = 3 * 3 = 0 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $1 * 2 = 3 \in I$
$(2 * 3) * (0 * 2) = 3 * 2 = 1 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $2 * 2 = 0 \in I$
$(2 * 3) * (0 * 3) = 3 * 1 = 2 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $3 * 2 = 1 \in I$
$(3 * 3) * (0 * 0) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $0 * 3 = 1 \in I$
$(3 * 3) * (0 * 1) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $1 * 3 = 2 \in I$
$(3 * 3) * (0 * 2) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $2 * 3 = 3 \in I$
$(3 * 3) * (0 * 3) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $z = 3 \in I$ akibatnya $3 * 3 = 0 \in I$

Untuk setiap $x, y, z \in M_4\ dan\ I = \{0, 1, 2, 3\}$, aksioma 1) dan 2) terpenuhi, akibatnya $I = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah a-ideal dari M_4. Penulis telah meneliti lebih lanjut tentang subset $I = M_n; n = 2, 3, 4, 5, 6$ dan dari hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa $\forall\, I = M_n;\ n = 2, 3, 4, 5, 6$ aksioma *a*-ideal terpenuhi. Hal ini dikarenakan sifat tertutup dari operasi $*$.

3.3.3 *p*-ideal

Definisi 3.3.3.1

Didefinisikan $(M_n,*, 0)$ adalah Aljabar BCI yang *P-semisimple*. suatu subset *I* yang tak kosong dari $(M_n,*, 0)$ dikatakan *p*-ideal pada M_n jika memenuhi:

1) $0 \in I$
2) $(x * z) * (y * z) \in I$ dan $y \in I$ akibatnya $x \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_n$ (Saeid, 2010: 550-551).

Contoh 3.3.3.2

Dari **contoh 3.3.1.2,** selidiki apakah memenuhi aksioma *p*-ideal?

Jawab: Ambil $I = \{0, 1, 2, 3)$

1) Akan dibuktikan bahwa $0 \in I$

   Karena $I = \{0, 1, 2, 3)$, makajelas bahwa $0 \in I$

2) Akan dibuktikan $(x * z) * (y * z) \in I$ dan $y \in I$ akibatnya $x \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_4$

$(0 * 0) * (0 * 0) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 1) * (0 * 1) = 3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 2) * (0 * 2) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 3) * (0 * 3) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(1 * 0) * (0 * 0) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 1) * (0 * 1) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 2) * (0 * 2) = 3 * 2 = 1 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 3) * (0 * 3) = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(2 * 0) * (0 * 0) = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$

$(2 * 1) * (0 * 1) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 2) * (0 * 2) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 3) * (0 * 3) = 3 * 1 = 2 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(3 * 0) * (0 * 0) = 3 * 0 = 3 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 1) * (0 * 1) = 2 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 2) * (0 * 2) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 3) * (0 * 3) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 0 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(0 * 0) * (1 * 0) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 1) * (1 * 1) = 3 * 0 = 3 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 2) * (1 * 2) = 2 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 3) * (1 * 3) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(1 * 0) * (1 * 0) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 1) * (1 * 1) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 2) * (1 * 2) = 3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 3) * (1 * 3) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(2 * 0) * (1 * 0) = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 1) * (1 * 1) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 2) * (1 * 2) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 3) * (1 * 3) = 3 * 2 = 1 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(3 * 0) * (1 * 0) = 3 * 1 = 2 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 1) * (1 * 1) = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 2) * (1 * 2) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 3) * (1 * 3) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 1 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(0 * 0) * (2 * 0) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 1) * (2 * 1) = 3 * 1 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 2) * (2 * 2) = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 3) * (2 * 3) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(1 * 0) * (2 * 0) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 1) * (2 * 1) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 2) * (2 * 2) = 3 * 0 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 3) * (2 * 3) = 2 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(2 * 0) * (2 * 0) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 1) * (2 * 1) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 2) * (2 * 2) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 3) * (2 * 3) = 3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(3 * 0) * (2 * 0) = 3 * 2 = 1 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 1) * (2 * 1) = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 2) * (2 * 2) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 3) * (2 * 3) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 2 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(0 * 0) * (3 * 0) = 0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 1) * (3 * 1) = 3 * 2 = 1 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 2) * (3 * 2) = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(0 * 3) * (3 * 3) = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 0 \in I$
$(1 * 0) * (3 * 0) = 1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 1) * (3 * 1) = 0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$

$(1 * 2) * (3 * 2) = 3 * 1 = 2 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(1 * 3) * (3 * 3) = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 1 \in I$
$(2 * 0) * (3 * 0) = 2 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 1) * (3 * 1) = 1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 2) * (3 * 2) = 0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(2 * 3) * (3 * 3) = 3 * 0 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 2 \in I$
$(3 * 0) * (3 * 0) = 3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 1) * (3 * 1) = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 2) * (3 * 2) = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$
$(3 * 3) * (3 * 3) = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I$ akibatnya $x = 3 \in I$

Untuk setiap $x, y, z \in M_4 \; dan \; I = \{0, 1, 2, 3\}$, aksioma 1) dan 2) dari *p*-ideal terpenuhi, akibatnya $I = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah *p*-ideal dari M_4. Penulis telah meneliti lebih lanjut tentang subset $I = M_n; n = 2, 3, 4, 5, 6$ dan dari hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa $\forall \, I = M_n; \; n = 2, 3, 4, 5, 6$ aksioma *p*-ideal terpenuhi. Hal ini dikarenakan sifat tertutup dari operasi $*$.

3.3.4 *Fantastic*- ideal

Definisi 3.3.4.1

Didefinisikan $(M_n, *, 0)$ adalah Aljabar BCI *P-semisimple* dan I adalah ideal pada M_n. Maka I dikatakan *fantastic*-ideal pada M_n jika$(x * y) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $x * \big(y * (y * x)\big) \in I$; $\forall x, \; y, \; z \in M_n$

Contoh 3.3.4.2

Didefinisikan $(M_3, *, 0)$ adalah Aljabar BCI *P-semisimple* dan I adalah ideal pada M_3. Tunjukkan bahwa I adalah *fantastic*-ideal.

Jawab: Ambil $I = \{0, 1, 2)$. Akan ditunjukkan $\forall x, \; y, \; z \in M_3$ berlaku $(x * y) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $x * (y * (y * x)) \in I$

$(0 * 0) * 0 = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $0 * \big(0 * (0 * 0)\big) = 0 *$

$(0 * 0) = 0 * 0 = 0 \in I$

$(0 * 1) * 0 = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $0 \in I$ maka $0 * \big(1 * (1 * 0)\big) = 0 * (1 * 1) = 0 * 0 = 0 \in I$

$(0 * 2) * 0 = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $0 \in I$ maka $0 * \big(2 * (2 * 0)\big) = 0 * (2 * 2) = 0 * 0 = 0 \in I$

$(1 * 0) * 0 = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $0 \in I$ maka $1 * \big(0 * (0 * 1)\big) = 1 * (0 * 2) = 1 * 1 = 0 \in I$

$(1 * 1) * 0 = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $1 * \big(1 * (1 * 1)\big) = 1 * (1 * 0) = 1 * 1 = 0 \in I$

$(1 * 2) * 0 = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $0 \in I$ maka $1 * \big(2 * (2 * 1)\big) = 1 * (2 * 1) = 1 * 1 = 0 \in I$

$(2 * 0) * 0 = 2 * 0 = 2 \in I$ dan $0 \in I$ maka $2 * \big(0 * (0 * 2)\big) = 2 * (0 * 1) = 2 * 2 = 0 \in I$

$(2 * 1) * 0 = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $0 \in I$ maka $2 * \big(1 * (1 * 2)\big) = 2 * (1 * 2) = 2 * 2 = 0 \in I$

$(2 * 2) * 0 = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $2 * \big(2 * (2 * 2)\big) = 2 * (2 * 0) = 2 * 2 = 0 \in I$

$(0 * 0) * 1 = 0 * 1 = 2 \in I$ dan $1 \in I$ maka $0 * \big(0 * (0 * 0)\big) = 0 * (0 * 0) = 0 * 0 = 0 \in I$

$(0 * 1) * 1 = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $1 \in I$ maka $0 * \big(1 * (1 * 0)\big) = 0 * (1 * 1) = 0 * 0 = 0 \in I$

$(0 * 2) * 1 = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $1 \in I$ maka $0 * \big(2 * (2 * 0)\big) = 0 * (2 * 2) = 0 * 0 = 0 \in I$

$(1 * 0) * 1 = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $1 \in I$ maka $1 * \big(0 * (0 * 1)\big) = 1 * (0 * 2) = 1 * 1 = 0 \in I$

$(1 * 1) * 1 = 0 * 1 = 2 \in I$ dan $1 \in I$ maka $1 * \big(1 * (1 * 1)\big) = 1 * (1 * 0) = 1 * 1 = 0 \in I$

$(1 * 2) * 1 = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $1 \in I$ maka $1 * \big(2 * (2 * 1)\big) = 1 * (2 * 1) = 1 * 1 = 0 \in I$

$(2 * 0) * 1 = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $1 \in I$ maka $2 * \big(0 * (0 * 2)\big) = 2 * (0 * 1) = 2 * 2 = 0 \in I$

$(2 * 1) * 1 = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $1 \in I$ maka $2 * \big(1 * (1 * 2)\big) = 2 * (1 * 2) = 2 * 2 = 0 \in I$

$(2 * 2) * 1 = 0 * 1 = 2 \in I$ dan $1 \in I$ maka $2 * \big(2 * (2 * 2)\big) = 2 * (2 * 0) = 2 * 2 = 0 \in I$

$(0 * 0) * 2 = 0 * 2 = 1 \in I$ dan $2 \in I$ maka $0 * \big(0 * (0 * 0)\big) = 0 * (0 * 0) = 0 * 0 = 0 \in I$

$(0 * 1) * 2 = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $2 \in I$ maka $0 * \big(1 * (1 * 0)\big) = 0 * (1 * 1) = 0 * 0 = 0 \in I$

$(0 * 2) * 2 = 2 * 1 = 1 \in I$ dan $2 \in I$ maka $0 * \big(2 * (2 * 0)\big) = 0 * (2 * 2) = 0 * 0 = 0 \in I$

$(1 * 0) * 2 = 1 * 2 = 2 \in I$ dan $2 \in I$ maka $1 * \big(0 * (0 * 1)\big) = 1 *$

$(0 * 2) = 1 * 1 = 0 \in I$
$(1 * 1) * 2 = 0 * 2 = 1 \in I$ dan $2 \in I$ maka $1 * \big(1 * (1 * 1)\big) = 1 *$
$(1 * 0) = 1 * 1 = 0 \in I$
$(1 * 2) * 2 = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $2 \in I$ maka $1 * \big(2 * (2 * 1)\big) = 1 *$
$(2 * 1) = 1 * 1 = 0 \in I$
$(2 * 0) * 2 = 2 * 2 = 0 \in I$ dan $2 \in I$ maka $2 * \big(0 * (0 * 2)\big) = 2 *$
$(0 * 1) = 2 * 2 = 0 \in I$
$(2 * 1) * 2 = 1 * 2 = 2 \in I$ dan $2 \in I$ maka $2 * \big(1 * (1 * 2)\big) = 2 *$
$(1 * 2) = 2 * 2 = 0 \in I$
$(2 * 2) * 2 = 0 * 2 = 1 \in I$ dan $2 \in I$ maka $2 * \big(2 * (2 * 2)\big) = 2 *$
$(2 * 0) = 2 * 2 = 0 \in I$

Untuk setiap $x, y, z \in M_3 \; dan \; I = \{0, 1, 2\}$, berlaku $\forall \; (x * y) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $x * (y * (y * x)) \in I$, akibatnya $I = \{0, 1, 2\}$ adalah *fantastic*-ideal dari M_3. Penulis telah menguji lebih lanjut tentang subset $I = M_n;\ \forall n = 2, 3, 4, 5, 6$ dan dari hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa $\forall \; I = M_n;\ n = 2, 3, 4, 5, 6$ aksioma *fantastic*-ideal terpenuhi. Hal ini dikarenakan sifat tertutup dari operasi $*$.

3.4 Sifat-Sifat yang Terbentuk dari Aljabar BCI *P-semisimple*

Sifat-sifat yang terdapat pada ideal aljabar BCI *P-semisimple* ini hanyalah sifat tertutup saja, karena sebagaimana hasil penelitian penulis yang tertera pada lampiran II ternyata operasi biner $*$ pada ideal aljabar BCI *P-semisimple* ini tidak assosiatif, tidak komutatif, tidak memiliki identitas terhadap operasi $*$ dan tidak memiliki invers. Sehingga operasi $*$ hanya bersifat tertutup.

Selain sifat tertutup di atas, penulis juga menganalisa tentang hubungan antar ideal-ideal pada aljabar BCI *P-semisimple*. Sesuai analisa pada subbab 3.2, diperoleh subset I dari M_n dikatakan ideal pada M_n jika

$I = M_n$. Selanjutnya, akibat dari hasil analisa tersebut adalah ideal-ideal yang terbentuk juga merupakan subset yang sama dengan M_n. Maka dapat disimpulkan ukuran (*properties*) dari tiap-tiap ideal (*q*-ideal, *a*-ideal, *p*-ideal, *fantastic*-ideal) pada aljabar BCI *P-semisimple* adalah sama (sama dengan M_n) sehingga irisan antar ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* adalah himpunan kosong $\{\emptyset\}$.

3.5 Pola Ideal Aljabr BCI *P-semisimple* dalam Al-Quran

Sebagaimana yang telah dijelaskan Allah dalam surat Al-Fatihah ayat 6 dan 7:

ٱهۡدِنَا ٱلصِّرَٰطَ ٱلۡمُسۡتَقِيمَ ۝٦ صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ
ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ۝٧

Artinya: 6. Tunjukilah kami jalan yang lurus,
7. (yaitu) jalan orang-orang yang Telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat.

Manusia dibagi menjadi beberapa golongan.yaitu:

1. Manusia yang beriman kepada Allah
2. Manusia yang ingkar kapada Allah dan Rasul-Nya (golongan kafir).
3. Manusia yang lahirnya menampakkan keimanan kepada Allah SWT dan Rasul-Nya akan tetapi sebenarnya ingkar (orang munafik). (Miftahur,2011)

Kemudian Allah menjelaskan secara detil dari tiap-tiap golongan dalam surat setelahnya yaitu surat Al-Baqarah.

1. Al-Baqarah ayat 2 -5

ذَٰلِكَ ٱلۡكِتَٰبُ لَا رَيۡبَۛ فِيهِۛ هُدٗى لِّلۡمُتَّقِينَ ٢ ٱلَّذِينَ يُؤۡمِنُونَ بِٱلۡغَيۡبِ
وَيُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَمِمَّا رَزَقۡنَٰهُمۡ يُنفِقُونَ ٣ وَٱلَّذِينَ يُؤۡمِنُونَ بِمَآ أُنزِلَ إِلَيۡكَ وَمَآ
أُنزِلَ مِن قَبۡلِكَ وَبِٱلۡأٓخِرَةِ هُمۡ يُوقِنُونَ ٤ أُوْلَٰٓئِكَ عَلَىٰ هُدٗى مِّن رَّبِّهِمۡۖ وَأُوْلَٰٓئِكَ
هُمُ ٱلۡمُفۡلِحُونَ ٥

Artinya: 2. Kitab (Al Quran) Ini tidak ada keraguan padanya; petunjuk bagi mereka yang bertaqwa,
3. (yaitu) mereka yang beriman kepada yang ghaib, yang mendirikan shalat, dan menafkahkan sebahagian rezki yang kami anugerahkan kepada mereka.
4. Dan mereka yang beriman kepada Kitab (Al Quran) yang Telah diturunkan kepadamu dan kitab-kitab yang Telah diturunkan sebelummu, serta mereka yakin akan adanya (kehidupan) akhirat.
5. Mereka Itulah yang tetap mendapat petunjuk dari Tuhan mereka, dan merekalah orang-orang yang beruntung.

Dalam surat Al-Baqarah ayat 2-5 ini, Allah menjelaskan ciri-ciri orang yang beriman adalah mereka percaya kepada yang gaib, mendirikan shalat, menafkahkan sebagian rizki untuk bersedekah/zakat, beriman kepada kitab-kitab suci Allah dan hari akhir. Mereka inilah yang dinyatakan sebagai orang yang selalu mendapat petunjuk dan beruntung.

2. Al-Baqarah ayat 6-7

إِنَّ ٱلَّذِينَ كَفَرُواْ سَوَآءٌ عَلَيۡهِمۡ ءَأَنذَرۡتَهُمۡ أَمۡ لَمۡ تُنذِرۡهُمۡ لَا يُؤۡمِنُونَ
٦ خَتَمَ ٱللَّهُ عَلَىٰ قُلُوبِهِمۡ وَعَلَىٰ سَمۡعِهِمۡۖ وَعَلَىٰٓ أَبۡصَٰرِهِمۡ غِشَٰوَةٞۖ وَلَهُمۡ
عَذَابٌ عَظِيمٞ ٧

Artinya: 6. Sesungguhnya orang-orang kafir, sama saja bagi mereka, kamu beri peringatan atau tidak kamu beri peringatan, mereka tidak juga akan beriman.

7. Allah Telah mengunci-mati hati dan pendengaran mereka, dan penglihatan mereka ditutup. dan bagi mereka siksa yang amat berat.

Dalam surat Al-Baqarah ayat 6-7 ini Allah menjelaskan ciri-ciri orang kafir yaitu mereka yang tidak dapat lagi melihat kebenaran. Diberi peringatan atau tidak sama saja karena Allah telah mengunci mata, pendengaran dan hati mereka. Dan bagi mereka lah siksa yang amat berat.

3. Al-Baqarah ayat 8-9

وَمِنَ ٱلنَّاسِ مَن يَقُولُ ءَامَنَّا بِٱللَّهِ وَبِٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِ وَمَا هُم بِمُؤۡمِنِينَ ٨
يُخَٰدِعُونَ ٱللَّهَ وَٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَمَا يَخۡدَعُونَ إِلَّآ أَنفُسَهُمۡ وَمَا
يَشۡعُرُونَ ٩

Artinya: 8. Di antara manusia ada yang mengatakan: "Kami beriman kepada Allah dan hari kemudian," pada hal mereka itu Sesungguhnya bukan orang-orang yang beriman.
9. Mereka hendak menipu Allah dan orang-orang yang beriman, padahal mereka Hanya menipu dirinya sendiri sedang mereka tidak sadar.

Pada surat Al-Baqarah ayat 8-9 ini Allah menjelaskan tentang ciri-ciri orang munafik yaitu mereka Orang munafik dikatakan sebagai orang yang mengaku dia beriman, tapi sebetulnya tidak.

Pembahasan dalam skripsi ini menyerupai konsep iman yang telah penulis paparkan di atas. Dalam uraian di atas, 3 golongan manusi adalah sebagai himpunan tak kosong (M_n), tindakan/perbuatan manusia dimisalkan operasi $*$ sedangkan iman diartikan elemen khusus “0”. Manusia yang berbuat/ tingkah lakunya di dasarkan pada iman $(M_n, *, 0)$ akan menjadi manusia yang baik (dirindu surga) jika ia memenuhi kriteria orang yang dirindukan surga:

Rasulullah SAW, mengatakan :" Surga merindukan empat orang:

1. Orang yang senantiasa membaca Al-Quran.
2. Orang yang menjaga lisannya.
3. Orang yang suka memberi makan orang yang kelaparan.
4. Keempat, Orang-orang yang berpuasa di bulan ramadhan (Yudhi, 2009).

Sedangkan golongan manusia yang tidak beriman (kafir atau munafik), ia tidak dapat memenuhi salah satu dari 4 ciri orang yang dirindu surga karena mereka tidak memiliki iman (elemen khusus “0”).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai ideal-ideal pada Aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n*, penulis dapat menyimpulkan bahwa:

1. Menentukan ideal pada Aljabar BCI *P-semisimple* dari grup modulo *n* dapat dilakukan dengan menggunakan definisi ideal pada Aljabar BCI. Namun jika belum terbukti *P-semisimple* maka selidiki terlebih dahulu dengan menggunakan aksioma *P-semisimple*.
2. Ideal-ideal yang ada pada Aljabar BCI *P-semisimple* yang terbangun dari karakterisasi grup modulo *n* adalah
    a. q-ideal

    Untuk setiap $I = M_n$, aksiom q-ideal terpenuhi. Yaitu: $0 \in I$ dan $x * (y * z) \in I$ dengan $y \in I$ akibatnya $x * z \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_n$

    b. a-ideal

    Untuk setiap $I = M_n$, aksiom a-ideal terpenuhi. Yaitu: $0 \in I$ dan $(x * z) * (0 * y) \in I$ dengan $z \in I$ akibatnya $y * x \in I, \forall x,\ y,$ $z \in M_n$

c. *p*-ideal

Untuk setiap $I = M_n$, aksiom *p*-ideal terpenuhi. Yaitu $0 \in I$ dan $(x * z) * (y * z) \in I$ dengan $y \in I$ akibatnya $x \in I, \forall x,\ y,\ z \in M_n$

d. *fantastic*-ideal

Untuk setiap $I = M_n$, aksiom *fantastic*-ideal terpenuhi. Yaitu jika$(x * y) * z \in I$ dan $z \in I$ maka $x * \big(y * (y * x)\big) \in I$; $\forall x,\ y,\ z \in M_n$

3. Sifat-sifat yang terdapat pada ideal aljabar BCI *P-semisimple* ini hanyalah sifat tertutup saja (tidak assosiatif, tidak komutatif, tidak memiliki identitas terhadap operasi $*$ dan tidak memiliki invers). Selain sifat tertutup di atas, diperoleh juga subset *I* dari M_n dikatakan ideal pada M_n jika $I = M_n$. Selanjutnya, akibat dari hasil analisa tersebut adalah ideal-ideal yang terbentuk juga merupakan subset yang sama dengan M_n. Maka dapat disimpulkan ukuran (*properties*) dari tiap-tiap ideal (*q*-ideal, *a*-ideal, *p*-ideal, *fantastic*-ideal) pada aljabar BCI *P-semisimple* adalah sama (sama dengan M_n) sehingga irisan antar ideal pada aljabar BCI *P-semisimple* adalah himpunan kosong $\{\emptyset\}$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini belum dirumuskan teorema tentang sifat dari masing-masing ideal yang ada pada Aljabar BCI *P-semisimple*. Sehingga bagi pembaca yang berminat memperdalam pengetahuannya atau mengembangkan ilmu tentang Aljabar BCI dapat menyelidiki sifat dari masing-masing ideal pada Aljabar BCI *P-semisimple*.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press

Abdussakir. 2009. *Matematika 1 (kajian integrative matematika dan Al-Qur'an)*. Malang: UIN-Malang Press

Anonymouse. 2011. *Salat Sunnah.* *http://wikipedia.org/wiki/salat*. Diakses tanggal 15 juli 2011

Bhatti, Shaban Ali. 1991. *SELF-MAPS AND CATEGORICAL ASPECTS*. Baharuddin Zakariya University. Pakistan.

Dummit. David S dan Foote. Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: PrenticeHall International, Inc.

Enderton, Herbert, B. 1977. *Elements Of Set Theory*. New York: Academi Press

Liu, Yong Lin., Xu, Yang dan Meng, Jie. 2007. *BCI-implicative ideals of BCI-algebras.*Published by Elsevier, Inc.

Munir, Rinaldi. 2009. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika press

Raisinghania, M. D., dkk. 1980. *Modern Algebra (for student of all Indian universities)*. S. Chand & Company LTD Ram Nagar, New DPLHI-110055

Rifa'i, Mohammad. 2009. *Risalah Tuntunan Shalat Lengkap*. Semarang: PT. Karya Toha Putra

Roziqin, Miftahur. 2010. *Tiga Golongan Manusia.* *http://miftahur.com/3g-golongan-manusia*. Diakses tanggal 10 juli 2011

Saeid, Arsham Borumand. 2010. *Fantastic ideals in BCI-Aljabar*. World Applied Sciences Journal 8 (5): 550-554

Siang, Jong Jek. 2006. *Matematika Diskrit dan aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi press

Soebagio, Suharti. 1993. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Universitas Terbuka

Syaidah, Yulis. 2011. *Konstruksi Aljabar-BCI Dari Grup*. *Tugas Akhir* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika F. Sain dan Teknologi UIN Maliki

Yudhi. 2009. *Empat Orang Yang Dirindu Surga*. http://yudhim.blogspot.com. Diakses tanggal 10 juli 2011

LAMPIRAN I

Uji Aksioma Ideal pada Aljabar BCI *P-semisimple* Yang Terbangun Dari Karakterisasi Grup Modulo *n*

Misalkan $(M_n,\ *,\ 0)$ adalah aljabar BCI yang *P-semisimple* dan terdaat subset tak kosong I dari $(M_n,\ *,\ 0)$. I dikatakan ideal pada M_n jika $\forall x, y \in M_n$ berlaku

i. $0 \in I$

ii. $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$. Dengan syarat $y \in I, x \leq y \rightarrow x \in I$ (Borumand, 2010: 550)

1. Modulo 2

Diketahui $M_2 = \{0, 1\}$

Subset yang mungkin terbentuk adalah $\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$.

Akan dibuktikan $I \subseteq M_2$ memenuhi aksioma ideal.

i. $0 \in I$

ii. $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$. Dengan syarat $y \in I, x \leq y \rightarrow x \in I$

Misalkan $I = \{0\}$. Karena anggota I adalah 0, maka terbukti bahwa $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_2$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$

$0 * 1 = 1 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$

$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{1\}$. Karena anggota I adalah 1, maka terbukti bahwa $0 \notin I$. Sehingga jelas untuk $I = \{1\}$ bukan ideal.

Misalkan $I = \{0,1\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 1, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_2$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$

$0 * 1 = 1 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$

$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Selanjutnya, untuk subset yang tidak memuat 0 dengan penulis diberi tanda merah yang menunnjukkan subset tersebut jelas bukan ideal.

2. Modulo 3

Diketahui $M_3 = \{0, 1, 2\}$.

Subset yang mungkin terbentuk adalah

$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$.

Akan dibuktikan $I \subseteq M_3$ memenuhi aksioma ideal.

i. $0 \in I$

ii. $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$. Dengan syarat $y \in I, x \leq y \rightarrow x \in I$

Misalkan $I = \{0\}$. Karena anggota I adalah 0, maka jelaslah bahwa $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_3$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 2 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 1 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 2 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,1\}$. Karena anggota I adalah 1 dan 0, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_3$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 2 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 1 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 2 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,2\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 2, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_3$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 2 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 1 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,1,2\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 2, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_3$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 2 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 1 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

3. Modulo 4

Diketahui $M_4 = \{0, 1, 2, 3\}$.
Subset yang mungkin terbentuk adalah

$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\},$
$\{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}.$

Akan dibuktikan $I \subseteq M_4$ memenuhi aksioma ideal.

i. $0 \in I$

ii. $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$. Dengan syarat $y \in I, x \leq y \rightarrow x \in I$

Misalkan $I = \{0\}$. Karena anggota I adalah 0, maka jelaslah bahwa $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_4$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 3 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 2 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 1 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,1\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 1, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_4$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 3 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 2 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,2\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 2, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_4$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 3 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 1 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,3\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_4$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 2 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 1 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,1,2\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 2, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_4$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 3 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,1,3\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_4$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 2 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,2,3\}$. Karena anggota I adalah 0, 2 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_4$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$

$0 * 3 = 1 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 2, 3\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_4$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 3 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 2 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 1 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

4. Modulo 5

Diketahui $M_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
Subset yang mungkin terbentuk adalah

$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0,3\}, \{0, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2,4\}, \{3, 4\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0,1,4\}, \{0, 2, 3\}, \{0,2,4\}, \{0, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1,2,4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 4\}, \{0, 1, 3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{0,1,2,3,4\}$.

Akan dibuktikan $I \subseteq M_5$ memenuhi aksioma ideal.

i. $0 \in I$
ii. $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$. Dengan syarat $y \in I, x \leq y \rightarrow x \in I$

Misalkan $I = \{0\}$. Karena anggota I adalah 1, maka jelaslah bahwa $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$

$2 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,1\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 1, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,2\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 2, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,3\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,4\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,1,2\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 2, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$

$1 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 3\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,1,4\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,2,3\}$. Karena anggota I adalah 0, 2 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,2,4\}$. Karena anggota I adalah 0, 2 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,3,4\}$. Karena anggota I adalah 0, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$

$1 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,1,2,3\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0,1,2,4\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$

$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,1,3,4\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,2,3,4\}$. Karena anggota I adalah 0, 2, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 1 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0,1,2,3,4\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_5$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 4 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 3 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 2 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$

$0 * 4 = 1 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

5. Modulo 6

Diketahui $M_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Subset yang mungkin terbentuk dari M_6 adalah
$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0,3\}, \{0, 4\}, \{0,5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1,5\}. \{2, 3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3, 4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0,1,4\}, \{0,1,5\}, \{0, 2, 3\}, \{0,2,4\}, \{0,2,5\}, \{0, 3, 4\}, \{0,3,5\}, \{0,4,5\}, \{1, 2, 3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2, 3, 4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3, 4, 5\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 4\}, \{0,1,2,5\}, \{0,1,3,4\}, \{0, 1, 3, 5\}, \{0,1,4,5\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{0,2,3,5\}, \{0,2,4,5\}, \{0,3,4,5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{0,1,2,3,4\}, \{0,1,2,3,5\}, \{0,1,2,4,5\}, \{0,1,3,4,5\}, \{0,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}, \{0,1,2,3,4,5\}$.
Akan dibuktikan $I \subseteq M_5$ memenuhi aksioma ideal.
i. $0 \in I$
ii. $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$. Dengan syarat $y \in I, x \leq y \rightarrow x \in I$

Misalkan $I = \{0\}$. Karena anggota I adalah 1, maka jelaslah bahwa $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$

$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 1\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 1, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 2\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 2, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$

$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 3\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 4\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$

$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 5\}$. Karena anggota I adalah 0 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow\ x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 2\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 2, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow\ x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$

$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 3\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 4\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$

$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 1 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$
Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 2, 3\}$. Karena anggota I adalah 0, 2 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$

$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 2, 4\}$. Karena anggota I adalah 0, 2 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 2, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 2 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 3, 4\}$. Karena anggota I adalah 0, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \in I$

$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 3, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 4, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 4 dan 5, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$

$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$
Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 2, 3\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2 dan 3, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 2, 4\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$

$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 2, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 3, 4\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$

$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$
Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 3, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 3 dan 5, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$
Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 4, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 2, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.
$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$

$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 2, 3, 4\}$. Karena anggota I adalah 0, 2, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 2, 3, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 2, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$

$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 2,\ 4, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 2, 4 dan 5, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow\ x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 3,\ 4, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 3, 4 dan 5, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow\ x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$

$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x, y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \notin I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \notin I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \notin I \rightarrow x = 5 \notin I$

Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 2, 3, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow\ x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \notin I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \notin I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \notin I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \notin I \rightarrow x = 4 \notin I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \notin I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$

Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 2, 4, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2, 4 dan 5, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow\ x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \notin I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \notin I \rightarrow x = 3 \notin I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$

$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \notin I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$
Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 3, 4, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 3, 4 dan 5, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \notin I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \notin I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \notin I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$
Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 2, 3, 4, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 2, 3, 4 dan 5, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \notin I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \notin I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \notin I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$

$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$
Tidak terpenuhi. Akibatnya I Terbukti bukan ideal

Misalkan $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Karena anggota I adalah 0, 1, 2, 3 dan 4, maka terbukti $0 \in I$ dan $\forall x,\ y \in M_6$ berlaku $x * y \in I$ dan $y \in I \rightarrow x \in I$.

$0 * 0 = 0 \in I$ dan $y = 0 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 1 = 5 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 2 = 4 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 3 = 3 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 4 = 2 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$0 * 5 = 1 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 0 \in I$
$1 * 1 = 0 \in I$ dan $y = 1 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 2 = 5 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 3 = 4 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 4 = 3 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$1 * 5 = 2 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 1 \in I$
$2 * 2 = 0 \in I$ dan $y = 2 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 3 = 5 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 4 = 4 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$2 * 5 = 3 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 2 \in I$
$3 * 3 = 0 \in I$ dan $y = 3 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 4 = 5 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$3 * 5 = 4 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 3 \in I$
$4 * 4 = 0 \in I$ dan $y = 4 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$4 * 5 = 5 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 4 \in I$
$5 * 5 = 0 \in I$ dan $y = 5 \in I \rightarrow x = 5 \in I$
Terpenuhi. Akibatnya I Terbukti ideal

LAMPIRAN II

Uji sifat-sifat operasi biner terhadap ideal pada Aljabar BCI *P-semisimple*

1. Tertutup

Akan dibuktikan $\forall x, y \in I$ dengan $I = M_n$, maka berlaku $x * y \in I$

Sifat tertutup ini terlihat pada tabel Cayley, contoh modulo 5

*	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0

Tabel Cayley untuk $(M_5, *, 0)$

Terlihat jelas pada tabel, berapapun nilai x dan y yang diinput hasilnya tidak akan keluar dari tabel.

2. Assosiatif

Akan dibuktikan $\forall x, y, z \in I$ dengan $I = M_n$, maka berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$

Contoh pada modulo 3

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Tabel Cayley untuk $(M_3, *, 0)$

Misalkan $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 1$

Maka $(x * y) * z = (0 * 0) * 1$

$= 0 * 1$

$= 2$

$x * (y * z) = 0 * (0 * 1)$

$= 0 * 2$

$= 1$

Terlihat $(x * y) * z \neq x * (y * z)$, karena $(x * y) * z = 2$ sedangkan $x * (y * z) = 1$. Maka terbukti tidak assosiatif.

3. Komutatif

Akan dibuktikan $\forall x, y, z \in I$ dengan $I = M_n$, maka berlaku $x * y = y * x$

Contoh pada modulo 3 diatas, misalkan $x = 0$ dan $y = 1$

Didapat $x * y = 0 * 1 = 2$ sedangkan $y * x = 1 * 0 = 1$. Jelaslah I tidak bersifat komutatif

4. Identitas Terhadap Operasi $*$

Akan dibuktikan $\forall x \in I$ dengan $I = M_n$, maka berlaku $x * 0 = 0 * x = x$

Dari tabel Cayle modulo 3 di atas, $1 * 0 \neq 0 * 1 \neq 1$

Karena ternyata pada modulo 3 tersebut, untuk x = 1 berlaku $x * 0 = 1 * 0 = 1$ sedangkan $0 * x = 0 * 1 = 2$. Maka jelaslah operasi $*$ tidak memiliki identitas.

5. Invers Terhadap Operasi $*$

Akan dibuktikan $\forall x \in I$ dengan $I = M_n$, maka berlaku $x * (-x) = (-x) * x = 0$

Karena pada nomor 4 di atas telah dijelaskan bahwa operasi $*$ tidak memiliki identitas maka operasi $*$ tidak memiliki invers.